

## DS 4 de Physique du 7/12/24

### Calculatrice autorisée

4h

#### ***Rappel des consignes :***

*Présentation de la copie :*

- *Laisser une marge à gauche pour la notation.*
- *Encadrer ou souligner les résultats.*
- *Donner le numéro complet de la question à laquelle vous répondez.*

*Rédaction :*

- *Répondre précisément aux questions posées*
- *Respecter les notations de l'énoncé.*
- *Ne pas utiliser d'abréviations (sauf si elles ont été définies)*
- *Justifier tous les résultats.*
- *Rédiger de façon claire, précise et concise.*
- *Citer le nom des lois utilisées.*
- *Toujours donner un résultat littéral (avant de faire éventuellement l'application numérique), sans application numérique intermédiaire, sans mélanger littéral et numérique.*
- *Contrôler l'homogénéité du résultat.*

*Applications numériques :*

- *Donner un nombre raisonnable de chiffres significatifs.*
- *Arrondir correctement la valeur donnée par la calculatrice.*
- *Ne jamais oublier les unités.*
- *Contrôler que l'ordre de grandeur est raisonnable.*
- *Ne jamais réutiliser le résultat arrondi d'une application numérique précédente (pour éviter les erreurs d'arrondis)*

***La notation prendra en compte le respect de ces consignes (aucun point pour un résultat non homogène, des points de rédaction...)***

## Problème 1 : Orage et foudre

Une partie des données numériques nécessaires à la résolution est regroupée à la fin de ce problème.

### Préambule

L'électrosphère est une couche atmosphérique ionisée. L'électrosphère et la Terre, de rayon  $R = 6370 \text{ km}$ , forment un gigantesque condensateur terrestre (figure 1), où le champ électrique par beau temps est dirigé de l'électrosphère vers la Terre et atteint environ  $100 \text{ à } 120 \text{ V.m}^{-1}$ .

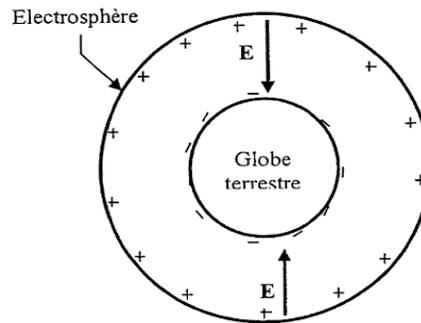


Figure 1 - Terre et électrosphère

Les armatures de ce condensateur sont l'électrosphère et le globe terrestre, entre lesquelles il y a la troposphère et la stratosphère qui constituent le diélectrique, dont l'épaisseur est d'environ  $80 \text{ km}$ . L'air comprend en permanence des charges électriques, positives et négatives, créées par les rayonnements cosmiques ou la radioactivité de la Terre. Par beau temps, il en résulte un courant atmosphérique de densité volumique  $\vec{j}$  tendant à décharger le condensateur.

Suite aux perturbations atmosphériques et sous certaines conditions, il se forme des nuages orageux en général du type cumulo-nimbus (figure 2) de couleur sombre. Ils constituent une gigantesque machine thermique dont la base et le sommet sont respectivement à environ  $2 \text{ km}$  et  $15 \text{ km}$  d'altitude. Sa constitution est rendue possible par l'élévation d'air chaud par des courants ascendants dont la vitesse est de quelques mètres par seconde. Lors de son ascension, cette masse d'air se charge en humidité jusqu'à devenir un nuage. La partie supérieure, où il fait froid, est occupée par les particules de glace, tandis que les gouttes d'eau s'établissent dans la partie inférieure.

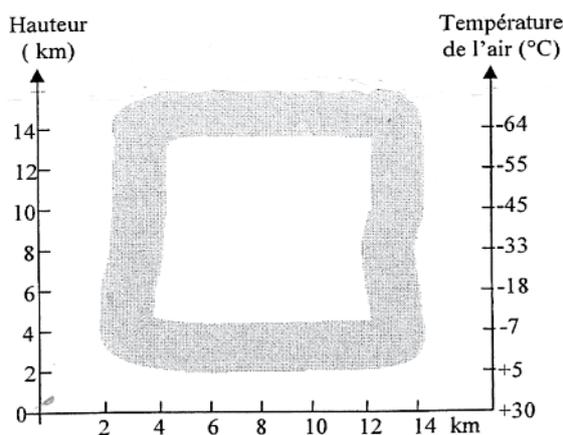


Figure 2 - Cumulo-nimbus

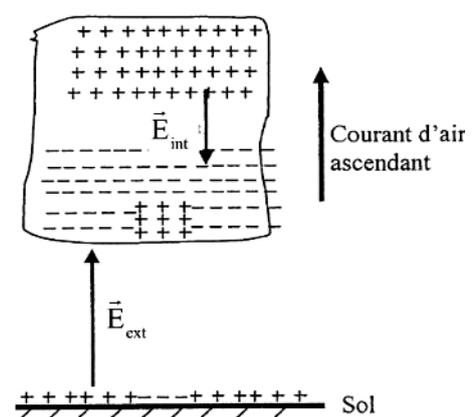


Figure 3 - Dipôles électriques

Les violents courants ascendants provoquent des collisions entre les gouttes d'eau et les micro-particules de glace, ce qui produit la création de charges électriques par frottement. Ces micro-particules de glace, plus légères et chargées positivement, sont emportées vers le haut par le courant d'air ascendant et occupent ainsi la partie supérieure du nuage qui forme le pôle positif. Tandis que les gouttes d'eau chargées négativement s'établissent dans la partie inférieure et créent le pôle négatif. Cependant, une petite quantité de charges positives demeurent à la base du nuage.

Le nuage fait apparaître sur la Terre, par influence électrique, une charge de signe opposé et crée ainsi deux véritables dipôles électriques (figure 3) :

- Un dipôle interne généré entre les pôles positif et négatif du nuage. Si le champ électrique interne  $\vec{E}_{\text{int}}$  devient suffisamment grand, il provoque un claquage interne dans le nuage ;
- Un dipôle externe, généré entre la base du nuage et la surface de la Terre. Si le champ électrique externe  $\vec{E}_{\text{ext}}$  atteint des conditions critiques de l'ordre de  $20 \text{ kV.m}^{-1}$ , il finit par provoquer une grande décharge entre le nuage et la Terre.

## A - Etude d'un condensateur sphérique

Un condensateur sphérique à air (figure 5), dont la permittivité diélectrique est assimilable à celle du vide  $\epsilon_0$ , est formé de deux armatures concentriques, de rayon  $R_1$  et  $R_2$ , avec  $R_1 < R_2$ .

L'armature intérieure de rayon  $R_1$  porte une charge totale  $Q$  uniformément répartie.

L'armature extérieure porte la charge totale  $-Q$  uniformément répartie.

On travaillera ici dans la base classique des coordonnées sphériques  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  et dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

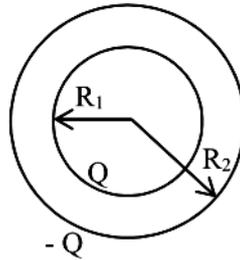


Figure 5 - Condensateur sphérique

1) Par des arguments clairs et précis d'invariance et de symétrie, justifier qu'entre les armatures, le champ électrique est de la forme :  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

2) a) Déterminer l'expression du champ électrique  $\vec{E}(r)$  entre les armatures, en fonction de  $r$ ,  $Q$  et  $\epsilon_0$ .

b) En déduire la différence de potentiel  $V_1 - V_2$  entre les deux armatures en fonction de  $Q$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $\epsilon_0$

c) En déduire l'expression de la capacité de ce condensateur sphérique en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $\epsilon_0$ .

3) Le diélectrique n'est pas parfait. Il possède une résistivité électrique certes grande mais finie. Il circule alors un courant de densité volumique  $\vec{j}_v$  dans tout l'espace inter-conducteur. Faire un dessin montrant l'allure et le sens des lignes de courant dans le cas où  $Q > 0$ .

## B - Analyse du préambule

En vous appuyant sur le texte fourni en préambule, répondre aux six questions suivantes :

4) Donner une valeur approchée de la capacité du condensateur délimité par l'électrosphère et le globe terrestre.

5) Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie électrique stockée en permanence et par beau temps dans l'électrosphère ?

6) Le champ électrique qui règne à la surface de la Terre est-il, en général, dans le même sens ou en sens opposé suivant que le temps est clément ou orageux ?

7) La foudre est-elle toujours descendante ou non ?

8) Quel est l'ordre de grandeur de la différence de potentiel entre la Terre et le nuage juste avant l'arrivée de la foudre ?

9) Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie véhiculée par un coup de foudre de courant  $I = 50\,000 \text{ A}$  et d'une durée de  $10 \text{ ms}$  ? Dans le cadre des énergies renouvelables, vous paraît-il judicieux de vouloir récupérer cette énergie ou non ? Une argumentation de quelques mots est attendue.

## C - Protection contre la foudre et prise de terre

Il convient de dévier le courant de foudre vers la Terre de façon à ne pas laisser se propager le long des lignes électriques des ondes de tension qui pourraient endommager les appareils électriques des usagers. Il faut utiliser un paratonnerre relié à une prise de terre.

Une prise de terre (figure 8) est constituée d'une coque hémisphérique métallique de centre O, de rayon intérieur  $R_a$ , et de rayon extérieur  $R_b$ . On note  $\gamma_{\text{mét}}$ , la conductivité électrique du métal qui la constitue.

Cette prise est enfoncée dans le sol, assimilé au demi-espace  $z < 0$  et de conductivité électrique  $\gamma_{\text{sol}}$ .

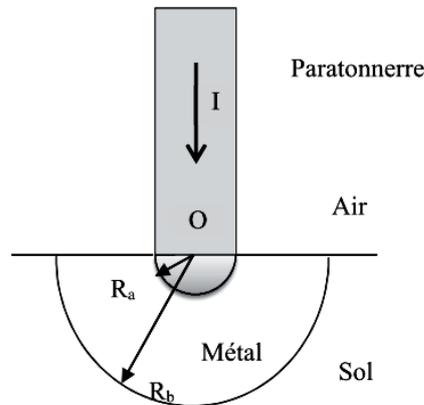


Figure 8 - Modèle simplifié d'une prise de terre

La prise de terre se décompose ainsi en deux résistances hémisphériques  $R_{\text{métal}}$  et  $R_{\text{sol}}$ , l'une en métal de rayon intérieur  $R_a$  et de rayon extérieur  $R_b$ , l'autre associée au sol de rayon intérieur  $R_b$  et de rayon extérieur infini.

Elle est destinée à recevoir un courant  $I$  provenant d'un paratonnerre. Il sera supposé indépendant du temps et descendant. On suppose que le courant, qui traverse la prise de terre, est radial. Sa densité est de la forme  $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$  en coordonnées sphériques.

- 10) a) Rappeler l'unité de la grandeur  $j(r)$   
 b) Donner l'expression de la densité de courant  $j(r)$  en fonction de  $I$  et de  $r$ .
- 11) a) Exprimer alors le champ électrique  $E(r)$  régnant dans le sol.  
 b) En déduire en fonction de  $I$ ,  $r$  et  $\gamma_{\text{sol}}$ , l'expression du potentiel électrique  $V(r)$  régnant dans le sol. On supposera que  $V = 0$  loin du point O.
- 12) Cette répartition non uniforme du potentiel à la surface de la Terre explique le foudroiement indirect des hommes ou des animaux.  
 On appelle  $R_h$ , la résistance du corps humain mesurée entre ses deux pieds supposés distants de  $a$ .  
 Pour ne pas être électrocuté (c'est-à-dire pour que son corps ne soit pas traversé par un courant supérieur à une valeur seuil notée :  $I_{\text{max}}$ ), un homme doit rester éloigné d'une distance au moins égale à  $D$  de la prise de terre.
- a) Trouver une relation entre  $D$ ,  $a$ ,  $R_h$ ,  $I$ ,  $I_{\text{max}}$  et  $\gamma_{\text{sol}}$ .  
 b) En supposant  $D \gg a$ , exprimer  $D$  en fonction de  $a$ ,  $R_h$ ,  $I$ ,  $I_{\text{max}}$  et  $\gamma_{\text{sol}}$ .  
 c) Application numérique : évaluer  $D$  pour  $I = 5,0 \cdot 10^4$  A.  
 d) Ce phénomène d'électrocution à distance touche-t-il plutôt les grands animaux (vaches, chevaux, ...) ou les petits animaux (lapins, renards, ...) ?

13) Expression de la résistance d'une coque hémisphérique :

On considère une coque hémisphérique homogène de conductivité électrique  $\gamma$ , comprise entre les rayons  $R_{\text{int}}$  et  $R_{\text{ext}}$  et parcourue par un courant radial.

On la décompose en une infinité de coques hémisphériques élémentaires comprises entre les rayons  $r$  et  $r + dr$ .

a) Exprimer en fonction de  $\gamma$ ,  $r$  et  $dr$ , la résistance élémentaire  $dR_C$  d'une coque hémisphérique élémentaire.

**b)** En déduire en fonction de  $\gamma$ ,  $R_{\text{int}}$  et  $R_{\text{ext}}$ , la résistance totale  $R_C$  de la coque hémisphérique.

**14) a)** Donner l'expression de la résistance globale, notée  $R_{\text{glob}}$  de la prise de terre en fonction de  $\gamma_{\text{mét}}$ ,  $\gamma_{\text{sol}}$ ,  $R_a$  et  $R_b$ .

**b)** Application numérique : évaluer  $R_{\text{glob}}$  pour  $R_a = 1,0 \text{ cm}$ ,  $R_b = 35 \text{ cm}$ ,  $\gamma_{\text{mét}} = 6,0 \text{ S. m}^{-1}$ .

**c)** La législation en terme de sécurité électrique impose que  $R_{\text{glob}} < 25 \Omega$ , est-ce respecté dans le cas de cette prise ? Sinon, que préconisez-vous pour remédier à ce problème ?

### **Données**

Permittivité diélectrique du vide :  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ F.m}^{-1}$ .

Conductivité électrique du sol :  $\gamma_{\text{sol}} : 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ S.m}^{-1}$ .

Résistance électrique entre deux pieds d'un homme :  $R_h = 2,5 \text{ k}\Omega$ .

Longueur d'un pas humain :  $a = 1,0 \text{ m}$ .

Courant d'électrocution d'un être humain :  $I_{\text{max}} = 25 \text{ mA}$ .

## Problème 2 : Expérience de Stern et Gerlach

### Données :

Constantes électromagnétiques du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ ,  $\epsilon_0 = 1/(36\pi) \times 10^{-9} \text{ F.m}^{-1}$ , masse de l'électron :  $m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , charge élémentaire :  $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$ , Constante de BOLTZMANN  $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ , Constante d'AVOGADRO  $\mathcal{N} = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

Dans le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  de base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ , pour tout champ scalaire  $V(r, \theta, z)$  et pour tout champ de vecteur  $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta + F_z \vec{e}_z$ , on donne :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z \quad \text{div}(\vec{F}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left( \frac{\partial (rF_\theta)}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \theta} \right) \frac{\vec{e}_z}{r}$$

### I. Création d'un champ magnétique linéaire : bobines de MHOLTZHEL

La région de l'espace dans laquelle règnent les champs magnétiques étudiés ici possède les mêmes propriétés électromagnétiques que le vide.

On considère un solénoïde cylindrique de longueur  $\ell$  comportant  $N$  spires jointives identiques, circulaires de rayon  $R$ . Ce solénoïde est parcouru par un courant d'intensité  $I = \text{cste}$ .

□ 1 On se place dans le cadre de l'approximation du solénoïde infini. Etablir l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_{sol}$  créé par le solénoïde à l'intérieur de celui-ci.

On admettra que le champ est nul à l'extérieur du solénoïde.

On considère une spire circulaire  $C$ , de centre  $O$ , de rayon  $R$ , parcourue par un courant d'intensité  $I = \text{cste}$ . L'axe  $Oz$  est perpendiculaire au plan de la spire. On appelle  $\vec{B}_{coz}(z)$  le champ magnétique créé par la spire en un point situé sur  $Oz$  à la cote  $z$ .

La spire crée donc en un point  $M$  de son axe de position  $z$  un champ magnétique  $\vec{B}_{coz}(z)$  dont l'amplitude s'exprime par

$$B_{coz}(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( 1 + \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right)^{-3/2}$$

□ 2 À l'aide d'un schéma et des symétries du problème, préciser la direction de ce champ magnétique et discuter de son sens. En déduire une expression vectorielle  $\vec{B}_{coz}(z)$  si la spire est orientée positivement par rapport à son axe, lui-même orienté par  $\vec{u}_z$ .

□ 3 Exprimer  $\vec{B}_{coz}(0)$  en fonction de  $\mu_0, R$  et  $I$  puis  $\vec{B}_{coz}$  en fonction de  $\vec{B}_{coz}(0)$  et de la variable sans dimension  $u = z/R$ .

On considère le montage de la Figure 3 constitué de deux bobines plates d'épaisseur négligeable, composées chacune de  $N$  spires circulaires de rayon  $R$ , de même axe de symétrie  $Oz$ . Ces deux bobines ont pour centres de symétrie respectifs  $O_1$  et  $O_2$ , elles sont parcourues par des courants identiques d'intensité  $I = \text{cste}$ . Les extrémités de ces bobines sont séparées d'une distance  $D = 2d$ . La configuration de MHOLTZHEL est obtenue lorsque  $d = \sqrt{3}R/2$  et les courants  $I$  sont de sens contraire.

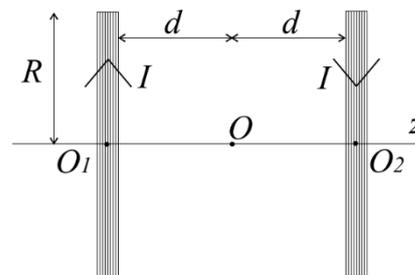


Figure 3 : Bobines de MHOLTZHEL

□ 4 En utilisant toujours la variable réduite  $u = z/R$ , établir l'expression du champ magnétique dans la configuration de MHOLTZHEL  $\vec{B}_{moz}(u)$  créé sur l'axe  $Oz$  en un point de cote  $z$  en fonction de  $N, I, R, \mu_0, u$  et un vecteur de base.

□ 5 On donne le développement limité :

$$\left[ 1 + \left( x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} = \frac{8\sqrt{7}}{49} \left( 1 \mp \frac{6\sqrt{3}}{7}x + \frac{48}{49}x^2 - \frac{240}{343}x^4 \pm \frac{1056\sqrt{3}}{2401}x^5 + o(x^5) \right)$$

Montrer que le champ magnétique créé par une bobine de MHOLTZHEL au voisinage de l'origine est très proche d'un champ linéaire de la forme  $\vec{B}_{moz}(z) = az \vec{e}_z$ . On exprimera la constante  $a$  en fonction de  $N$ ,  $\mu_o$ ,  $I$  et  $R$ .

- 6 Déterminer, en fonction de  $R$ , la longueur de l'intervalle sur l'axe  $Oz$  et centré sur  $O$  pour lequel  $\vec{B}_{moz}(z)$  est approximable à moins de 2% d'erreur relative par un champ linéaire de pente  $a$ .
- 7 On souhaite réaliser un champ linéaire de pente  $a = 10 \text{ T.m}^{-1}$  en utilisant un courant permanent d'intensité  $I = 10 \text{ A}$  et des bobines de MHOLTZHEL de 10 cm de rayon. Calculer le nombre de spires  $N$  à utiliser.
- 8 Le fil conducteur utilisé pour réaliser les bobines est du cuivre de conductivité  $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ . Les spires sont réalisées avec un fil de section carrée de côté  $b = 2 \text{ mm}$ . Calculer la puissance perdue par effet JOULE dans celles-ci. Commenter ce résultat. Dans la pratique quelle solution technologique doit-on utiliser pour réaliser cette source ?

## II. L'expérience de Stern et Gerlach

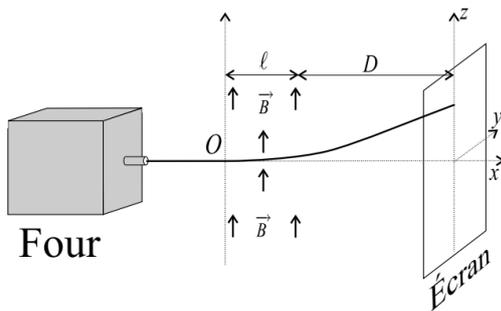


Figure 4

Dans une enceinte, où règne une faible pression, est placé un four contenant du lithium porté à la température  $T$ . Le lithium se vaporise et le gaz d'atomes obtenu se comporte comme un gaz parfait monoatomique à la température  $T$ . Un ensemble d'ouvertures pratiquées dans le four permet d'obtenir un jet d'atomes de lithium. On suppose que ce jet est monocinétique et donc que les atomes ont tous la même énergie cinétique  $E_{co} = m \|\vec{v}_o\|^2 / 2$  où  $m$  est la masse d'un atome de lithium et  $\vec{v}_o$  la vitesse moyenne des atomes dans le four. On supposera qu'en sortie du four  $\vec{v}_o = v_o \vec{e}_x$ . Le poids des atomes de lithium est négligeable dans toute cette expérience.

On règle la température  $T$  de façon à obtenir  $E_{co} = 1,6 \cdot 10^{-20} \text{ J}$ .

En sortie du four, le jet d'atomes de lithium passe dans une région où règne un champ magnétique  $\vec{B} = B(z) \vec{e}_z$  tel que  $B(z) = az$  (voir Figure 4). On admet que cette région est de largeur  $\ell$  et qu'en dehors de celle-ci le champ magnétique est négligeable. On constate que le jet est dévié et que son impact sur un écran situé à l'abscisse  $d = \ell + D$  se situe à une cote  $z_o$  non nulle. Cette déviation est explicable par le fait que les atomes de lithium sont porteurs de moments dipolaires magnétiques  $\vec{\mathcal{M}}$  constants et que dans la zone où règne le champ magnétique ils sont soumis à une force magnétique dérivant de l'énergie potentielle  $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$

- 16 — Après avoir exprimé cette force, établir, en fonction de  $a$ ,  $\mathcal{M}_z = \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_z$ , et  $E_{co}$ , la relation entre  $z$  et  $x$  décrivant la trajectoire d'un atome dans la région où règne le champ magnétique linéaire.
- 17 — Exprimer la cote  $z_o$  en fonction de  $D$ ,  $\ell$ ,  $E_{co}$ ,  $a$  et  $\mathcal{M}_z$ .
- 18 — On observe en fait sur l'écran deux taches symétriques par rapport à  $Ox$ . Que peut-on en déduire ?
- 19 — On choisit  $E_{co} = 1,6 \cdot 10^{-20} \text{ J}$ ,  $a = 10 \text{ T.m}^{-1}$ ,  $\ell = 10 \text{ cm}$  et  $D = 10 \text{ m}$  et on observe  $z = \pm 3 \text{ mm}$ . Calculer la composante  $\mathcal{M}_z$  du moment magnétique des atomes de lithium.

Cette expérience réalisée par les physiciens OTTO STERN et WALTHER GERLACH en 1921 a permis de mettre en évidence la quantification du moment cinétique de spin des atomes étudiés (et a valu le prix Nobel de physique à OTTO STERN en 1943).

### Problème 3 : Contrôle non destructif par courants de Foucault

L'aluminium tient une place de choix dans la fabrication des pièces métalliques des avions en particulier sous forme d'alliage. Dans les avions récents comme l'A380, les alliages d'aluminium représentent 75% de la masse de l'avion vide. La sensibilité de ces alliages à la corrosion justifie le nombre élevé d'études récentes dans les laboratoires de recherche, publics et privés.

Ce problème s'intéresse à une méthode physique non destructive permettant de détecter des crevasses à l'intérieur d'une structure métallique

Le but des essais non destructifs est de déceler dans une pièce métallique, et en respectant son intégrité, toute particularité de sa structure. On souhaite ici contrôler la qualité d'une plaque d'aluminium, de faible épaisseur par rapport à ses autres dimensions, en utilisant une technique de contrôle non destructif par courants de Foucault.

Le dispositif utilisé comprend :

- une bobine alimentée par un générateur de tension sinusoïdale de fréquence  $f$ . Cette bobine est déplacée à la surface de la plaque à tester, sans contact électrique ;
- un système de mesure d'impédance par détection synchrone afin de mesurer en direct l'impédance de la bobine. En effet, la bobine joue à la fois le rôle d'émetteur et de récepteur : lorsque l'opérateur passe la bobine au dessus d'un défaut interne à la plaque, son impédance interne est légèrement modifiée.

La figure 1 présente le système de détection, le dispositif de mesure d'impédance n'est pas représenté.

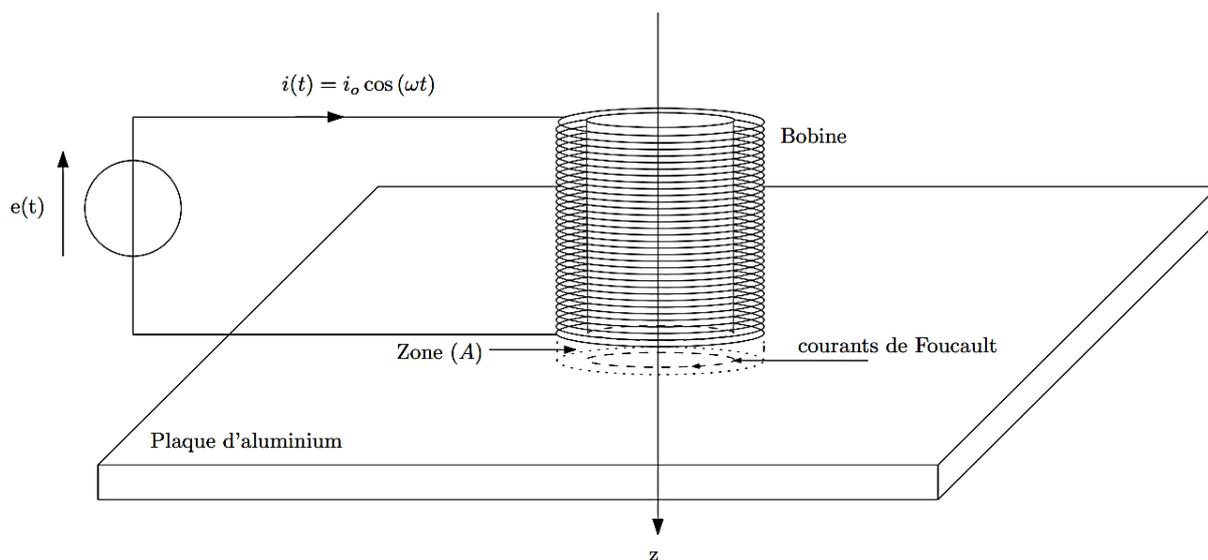


Figure 1 Principe du CND

Données :

fréquence du générateur	$f = 50 \text{ Hz}$
épaisseur de la plaque	$d = 3,0 \text{ mm}$
longueur de la bobine	$l_b = 12 \text{ cm}$
nombre de spire de la bobine	$N = 1,0 \times 10^3$
rayon moyen du bobinage	$R_b = 2,5 \text{ cm}$
masse molaire de l'aluminium	$M = 27 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
masse volumique de l'aluminium	$\mu = 2,7 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
conductivité électrique de l'aluminium	$\gamma_0 = 3,8 \times 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$
perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$

# I.A – Expression approchée du champ magnétique créé par la bobine excitatrice dans la plaque

À l'aide d'un logiciel de simulation, on visualise les cartes du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par la bobine dans différentes situations et ce afin d'établir son expression approchée.

Les figures 3, 4 et 5 représentent les cartes du champ créé par la bobine ainsi que les profils axiaux et radiaux de ce champ dans trois cas, avec une même amplitude de courant  $i_0$  :

- la bobine seule pour  $f = 50$  Hz (carte 1) ;
- la bobine en présence de la plaque pour  $f = 50$  Hz (carte 2) ;
- la bobine en présence de la plaque pour  $f = 200$  Hz (carte 3).

Le profil axial représente l'amplitude du champ magnétique  $\vec{B}$  en un point  $M$  appartenant à l'axe ( $Oz$ ) en fonction de sa coordonnée  $z$ , l'origine de cet axe étant choisie au centre de la bobine (voir figure 2). Le profil radial représente l'amplitude du champ magnétique  $\vec{B}$  en un point  $M$  appartenant au plan  $z = l_b/2$  en fonction de son abscisse  $x_r$  sur l'axe ( $M, \vec{e}_r$ ), l'origine de cet axe étant choisie sur un des côtés de la bobine (voir figure 2).

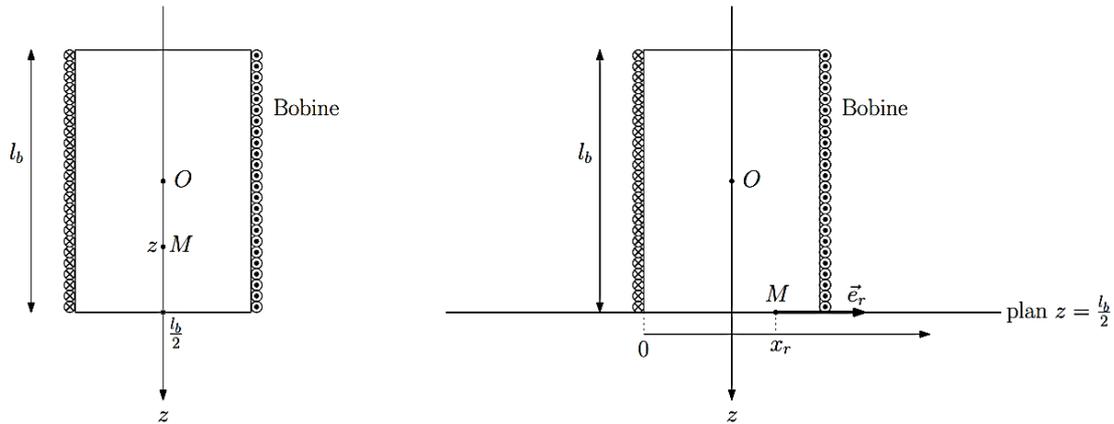


Figure 2 Conventions pour les profils axial et radial

I.A.1) Justifier que le champ créé en un point  $M$  de l'espace est de la forme

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z, t)\vec{e}_r + B_z(r, z, t)\vec{e}_z$$

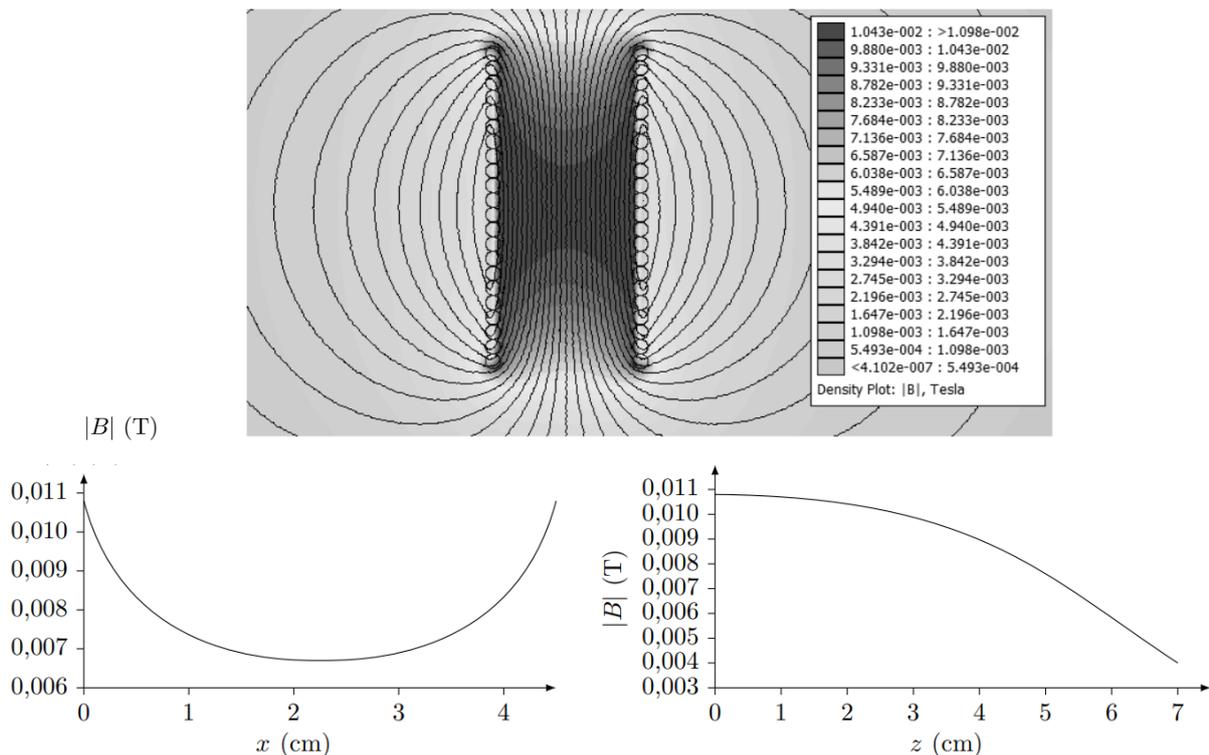


Figure 3 Première simulation

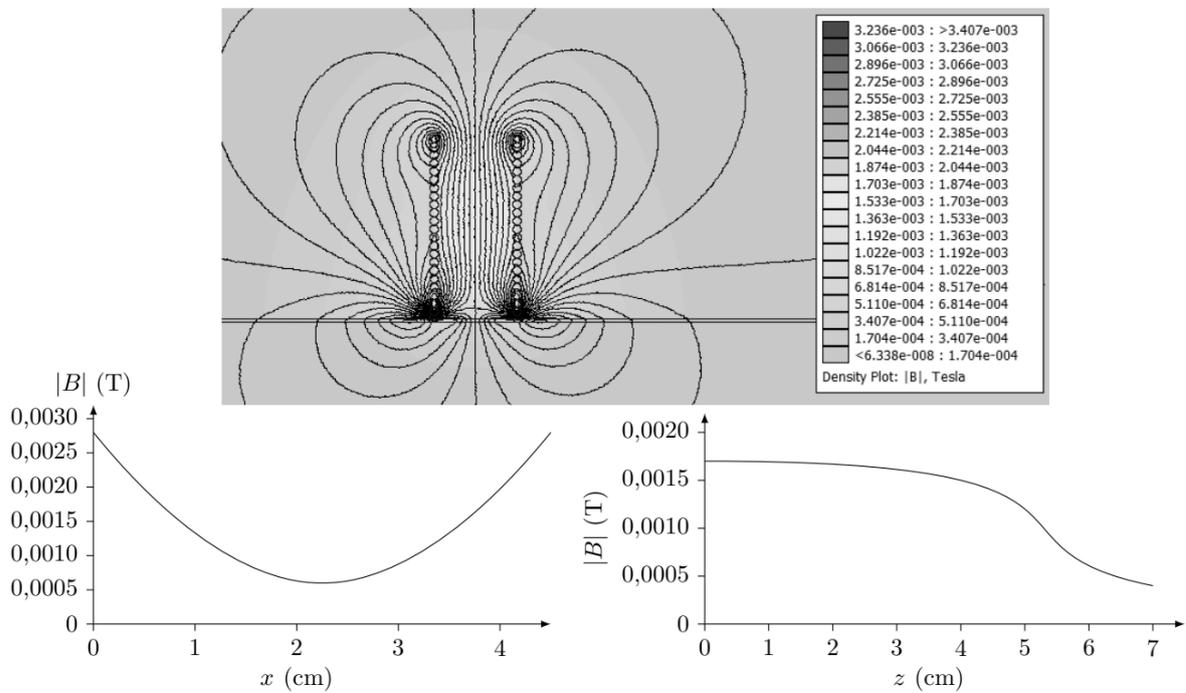


Figure 4 Deuxième simulation

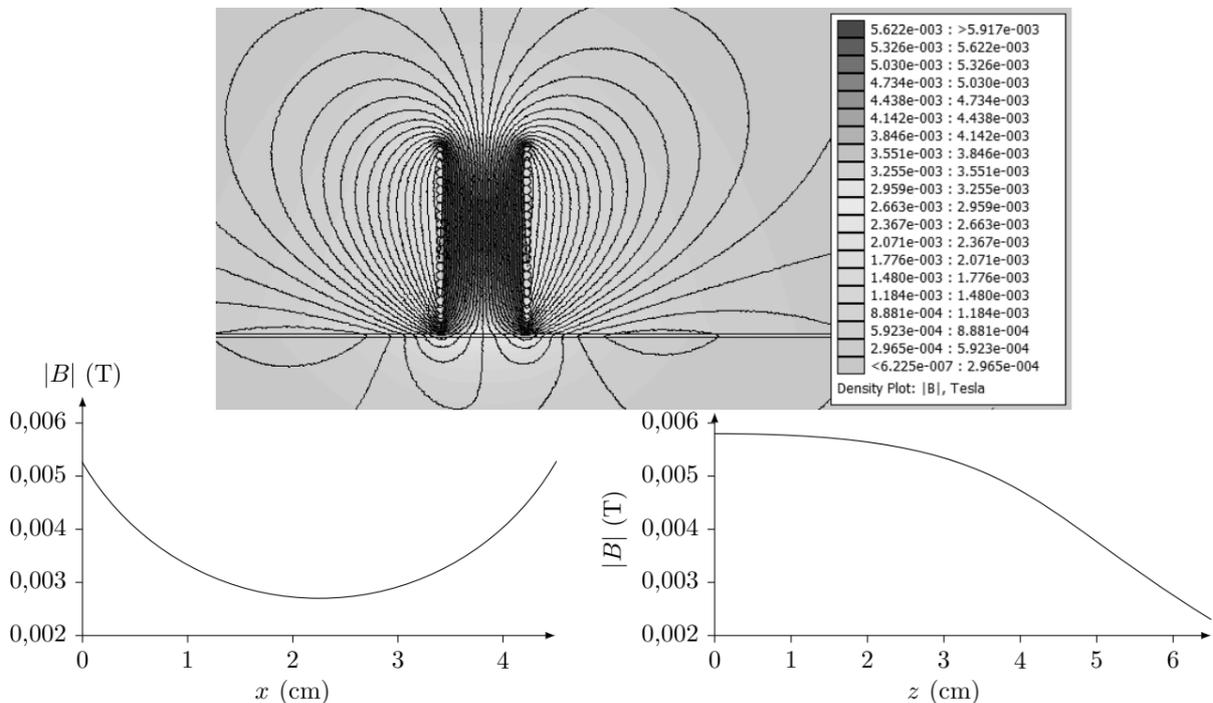


Figure 5 Troisième simulation

**IA.2)** Affecter chaque simulation ( Première simulation = Figure 3 ; deuxième simulation = figure 4 ou troisième simulation = figure 5) à chaque carte (Carte 1 = bobine seule ; ou carte 2 = bobine en présence de la plaque pour  $f = 50$  Hz, ou carte 3 = bobine en présence de la plaque pour  $f = 200$  Hz). Justifier.

**IA.3)** On s'intéresse au champ magnétique créé dans la partie de la plaque directement au contact avec la bobine (zone  $A$ ) sur la figure 1). Dans une première approximation, on suppose que le champ dans cette zone est de la forme  $\vec{B}(M) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$  où  $B_0$  est l'amplitude du champ magnétique supposée uniforme.

- En vous aidant des profils de figure 5, proposer une valeur numérique pour  $B_0$  (on prendra la valeur au centre de la zone A).
- En considérant que le champ au centre  $O$  de la bobine peut être assimilé au champ créé par un solénoïde infini et en vous aidant de la figure 5, justifier que  $B_0$  peut s'écrire :

$$B_0 = \alpha \frac{\mu_0 N i_0}{l_b} \quad (\text{I.1})$$

où  $\alpha$  est un coefficient dont on précisera la valeur numérique.

## I.B – Courants de Foucault

On se place toujours dans l'hypothèse où le champ magnétique dans la zone ( $A$ ) est de la forme  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ . Ce champ magnétique étant variable, il apparaît dans la plaque, un champ électrique  $\vec{E}$  orthoradial, lui-même à l'origine de courants induits.

**I.B.1)** À l'aide de la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer dans la zone ( $A$ ) l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  induit par les variations temporelles de  $\vec{B}$ .

**I.B.2)** Etablir que l'expression du vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  est donnée par la relation  $\vec{j} = A r \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$  où  $A$  est une constante à exprimer en fonction de  $\omega$ ,  $\gamma_0$  et  $B_0$ .

## I.C – Modification de l'impédance de la bobine excitatrice

L'impédance de la bobine en l'absence de la plaque est  $\underline{Z} = R + jL\omega$ . En présence de la plaque, cette impédance est modifiée. Le but de cette sous-partie est de déterminer cette nouvelle impédance.

On modélise les variations de l'impédance  $\underline{Z}$  de la bobine en présence de la plaque de la manière suivante

$$\underline{Z} = (R + \delta R) + j\omega(L - \delta L) \quad \text{où} \quad \delta R \langle i^2 \rangle = \langle P_J \rangle \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \delta L \langle i^2 \rangle = \langle E_m \rangle$$

avec

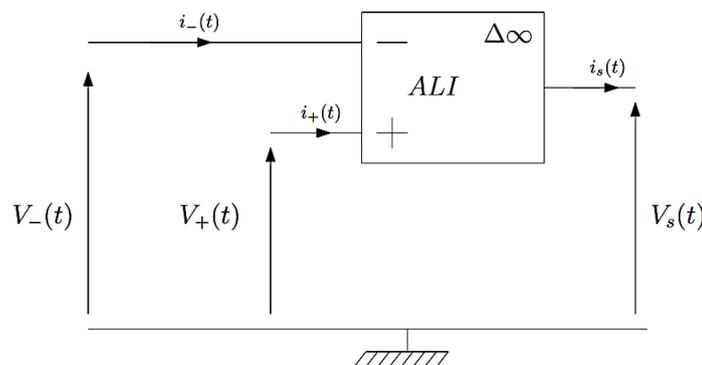
- $P_J$  la puissance dissipée par effet Joule par les courants de Foucault dans la plaque ;
- $E_m$  l'énergie magnétique stockée dans la plaque ;
- $\langle X \rangle$  désignant la valeur moyenne temporelle de la grandeur  $X(t)$ .

### I.C.1) Mesure de l'impédance de la bobine détectrice en l'absence de la plaque :

(Cette question est une question non guidée. Il est demandé d'expliciter clairement la démarche. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution).

Annexe sur l'ALI :

L'amplificateur opérationnel (ALI), représenté figure 24, est un composant électronique permettant d'amplifier la différence de potentiel entre les entrées  $V_+$  et  $V_-$ .



**Figure 24** Représentation de l'ALI

Un ALI idéal est un ALI vérifiant les conditions suivantes :

1. les courants d'entrée  $i_+(t)$  et  $i_-(t)$  sont nuls ;
2. lorsque l'ALI idéal fonctionne en régime linéaire, on a  $V_+(t) = V_-(t)$  et  $|V_s(t)| < V_{\text{sat}} \approx 12 \text{ V}$  ;
3. lorsque l'ALI idéal fonctionne en régime non linéaire, on a :  $V_s(t) = +V_{\text{sat}}$  si  $V_+(t) > V_-(t)$  et  $V_s(t) = -V_{\text{sat}}$  si  $V_+(t) < V_-(t)$ .

Pour mesurer l'impédance de la bobine, on réalise le montage donné figure 22 où

- la résistance  $R'$  vaut  $500 \Omega$  ;
- l'amplificateur linéaire intégré fonctionne en régime linéaire ;
- le générateur basse fréquence est réglé en générateur de créneaux de fréquence  $f = 1/T = 1 \text{ kHz}$  : pour  $0 \leq t \leq T/2$ ,  $e(t) = E = 5,00 \text{ V}$  et pour  $T/2 \leq t \leq T$ ,  $e(t) = 0$  ;
- la tension  $Y_1(t)$  est utilisée pour déclencher la carte d'acquisition. La fréquence d'échantillonnage étant  $f_e = 50 \text{ kHz}$  et la durée d'acquisition est de  $20 \text{ ms}$ .

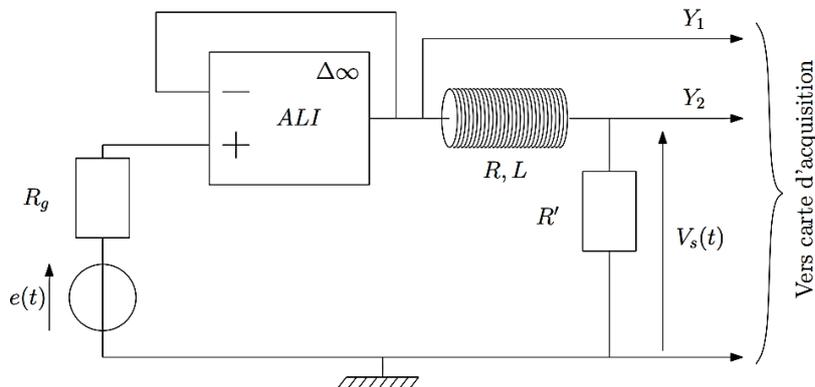


Figure 22 Schéma du montage

Le chronogramme de  $Y_2(t)$  est donné figure 23.

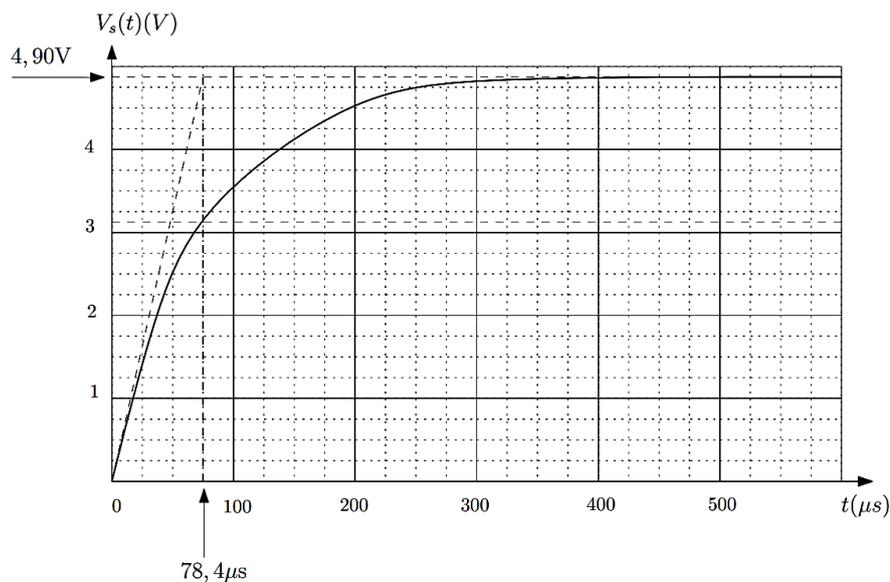


Figure 23 Chronogramme de  $Y_2$

Quel est le rôle de l'ALI dans ce montage ?

En exploitant soigneusement les figures 22 et 23, déterminer les valeurs numériques de  $R$  et de  $L$  qui caractérisent l'impédance de la bobine en l'absence de la plaque.

## Modification de l'impédance en présence de la plaque :

**I.C.2)** Justifier à l'aide d'un argument énergétique simple, que la partie réelle de l'impédance de la bobine augmente.

**I.C.3)** Justifier, en utilisant les cartes données par les figures 3, 4 et 5, que la partie imaginaire de l'impédance de la bobine diminue.

**I.C.4)** Montrer que  $P_J = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{8} \sin^2(\omega t)$ .

Déduire, en utilisant la relation (I.1), l'expression de  $\delta R$  en fonction de  $\alpha$ ,  $N$ ,  $d$ ,  $R_b$ ,  $\gamma_0$ ,  $\omega$  et  $l_b$  et  $\mu_0$ .

**I.C.5)** L'énergie électromagnétique  $E_m$  est due au champ magnétique  $\vec{B}'$  créé par les courants de Foucault dans la plaque. Pour simplifier, on suppose que ce champ  $\vec{B}'$  est nul en dehors de la zone (A) et que dans la zone (A) il est de la forme  $\vec{B}' = B'(r, z, t)\vec{e}_z$ .

a) En utilisant la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère écrite dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, déterminer le champ magnétique  $\vec{B}'$  créé dans la zone (A). On supposera ce champ nul pour  $r = R_b$ .

b) En déduire l'expression de  $E_m$ .

c) Déduire, en utilisant la relation (I.1), l'expression de  $\delta L$  en fonction de  $\alpha$ ,  $N$ ,  $d$ ,  $R_b$ ,  $\gamma_0$ ,  $\omega$  et  $l_b$  et  $\mu_0$ .

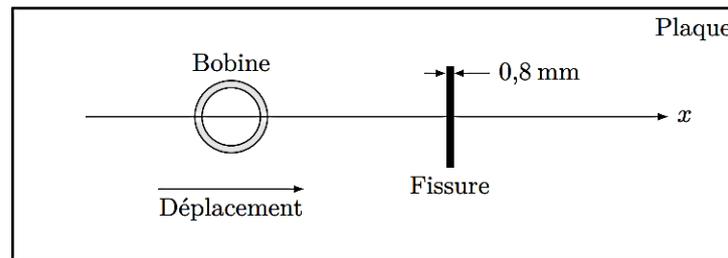
**I.C.6)** Déterminer un ordre de grandeur de  $\delta R$  et  $\delta L$ . Conclure.

**I.C.7)** Discuter des avantages et inconvénients à travailler à fréquence plus élevée.

## I.E - Évolution de $\underline{Z}$ en présence d'un défaut

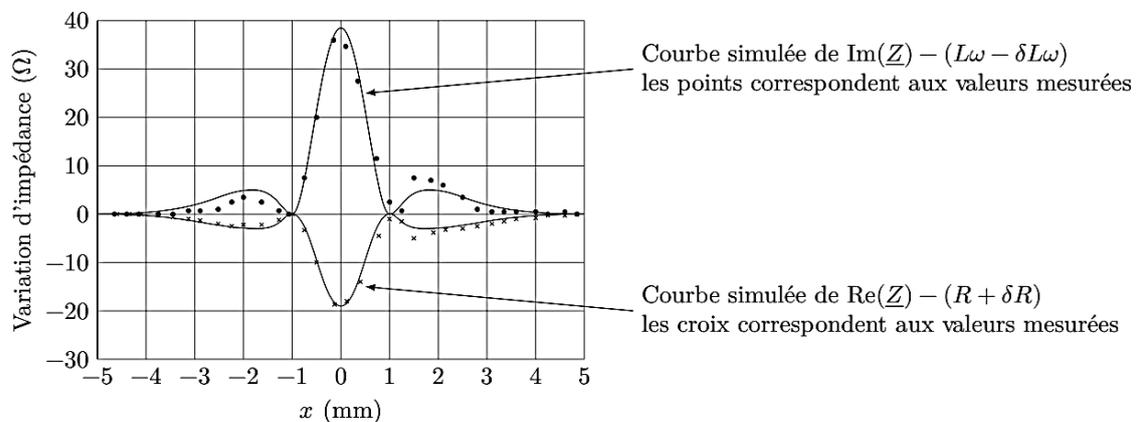
La bobine est déplacée le long de la plaque suivant une trajectoire rectiligne. On note  $x$  sa position. Afin de détecter facilement la présence d'éventuels défauts, on observe  $\text{Re}(\underline{Z}) - (R + \delta R)$  et  $\text{Im}(\underline{Z}) - (L\omega - \delta L\omega)$  en fonction de  $x$ .

La plaque présente une fissure superficielle rectiligne, de 0,8 mm de largeur et de 0,4 mm de profondeur, représentée sur la figure 10 et l'opérateur déplace la bobine en direction de la fissure.



**Figure 10** Déplacement de la bobine à la surface de la plaque (échelle non respectée)

La figure 11 présente des relevés effectués pour une fissure centrée en  $x = 0$ , lors d'une expérience similaire mais avec une bobine de configuration différente.



**Figure 11** Mesure et simulation des variations de  $\underline{Z}$ . D'après Yann Le Bihan, LGEP, CNRS—Supélec—Université Pierre et Marie Curie—Université Paris-Sud

**I.E.1)** Commenter les relevés.

**I.E.2)** Comment seraient modifiés les relevés si la fissure était suivant l'axe ( $Ox$ ) ?