ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°43

Exercice 1 (*)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies de $[\,a\,;b\,]$ sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. Soit $(x_n)_n \in [\,a\,;b\,]^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Montrer

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

Corrigé : Comme $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CU}} f$, on dispose de N entier tel que $f_n - f$ est bornée pour $n \geqslant \mathrm{N}$. Par inégalité triangulaire, on trouve pour $n \geqslant \mathrm{N}$

$$\begin{aligned}|f_n(x_n) - f(x)| &\leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leqslant \|f_n - f\|_\infty + \mathrm{o}(1)\end{aligned}$$

le $\mathrm{o}(1)$ résultant de la continuité de f en x. On conclut alors

$$\boxed{f_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)}$$

Remarque : Il faut choisir n suffisamment grand. Rien ne garantit *a priori* que les f_n sont bornées sur $[\,a\,;b\,]$. La fonction $\varphi : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$ pour $t \in \,]\,0\,;1\,]$ et $\varphi(0) = 0$ est bien définie sur $[\,0\,;1\,]$ et clairement non bornée.

Exercice 2 (*)

On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{n}\right)$

Étudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Corrigé : Soit x réel. On a

$$u_n(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle. Puis, on observe que

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_n(n) = \operatorname{Arctan}(1) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui prouve que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. Soit $a \geqslant 0$. On a

$$\|u_n\|_{\infty,[\,-a\,;a\,]} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right)$$

On en déduit la convergence uniforme sur tout segment centré en zéro et on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge simplement vers la fonction nulle, pas uniformément sur } \mathbb{R} \text{ mais uniformément sur tout segment.}}$$

Exercice 3 (*)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx}$$

Etudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_n$.

Corrigé : On $u_n(0) = 0$ pour n entier et $u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour $x > 0$ par croissances comparées. Les fonctions u_n sont clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et on trouve

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n'(x) = (1-nx)\,\mathrm{e}^{-nx}$$

On en déduit $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|u_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$$

Ainsi $\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge simplement et uniformément vers la fonction nulle.}}$

Exercice 4 (**)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right] \qquad u_n(x) = n\sin(x)\cos(x)^n$$

Étudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_n$.

Corrigé : On a $u_n(0) = u_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ pour n entier et $u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour $x \in \left]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right[$ par croissances comparées. On observe que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\sin(t)\cos(t)^n\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{n}{n+1}\cos(t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n}{n+1}$$

Ainsi $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Si la convergence uniforme avait lieu sur $\left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$, on aurait pu permuter les symboles limite et intégrale ce qui n'est pas le cas. Soit $a \in \left]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$. On a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \left[\,a\,;\frac{\pi}{2}\,\right] \qquad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant n\cos(a)^n = \mathrm{o}(1)$$

On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge simplement vers la fonction nulle, pas uniformément}\\ \text{sur } \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right] \text{ mais uniformément sur tout segment inclus dans } \left]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right].\end{array}}$$

Exercice 5 (*)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad u_n(x) = \begin{cases} x^n\ln(x) & \text{si } x \in \,]\,0\,;1\,] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_n$.

Corrigé : On a $u_n(0) = 0$ pour n entier et $u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $x \in \,]\,0\,;1\,]$. Les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;1\,]$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \left]\,0\,;1\,\right] \qquad u_n'(x) = x^{n-1}\left(n\ln(x)+1\right)$$

On en déduit $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|u_n\|_\infty = \left|u_n(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}})\right| = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge simplement et uniformément vers la fonction nulle.}}$

Exercice 6 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dérivée seconde bornée. Étudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad u_n(t) = n\left[f\left(t+\frac{1}{n}\right) - f(t)\right]$$

Corrigé : Soit t réel. D'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$u_n(t) = n\left[f(t) + f'(t)\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) - f(t)\right] = f'(t) + \mathrm{o}(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(t)$$

Autrement dit, la suite $(u_n)_n$ converge simplement vers f'. Puis, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, notant M un majorant de $|f''|$ sur $\mathbb{R}$, il vient

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad \left|f\left(t+\frac{1}{n}\right) - f(t) - f'(t)\frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n^2}$$

d'où $\qquad \forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad |u_n(t) - f'(t)| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{n}$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge simplement et uniformément vers } f'.}$

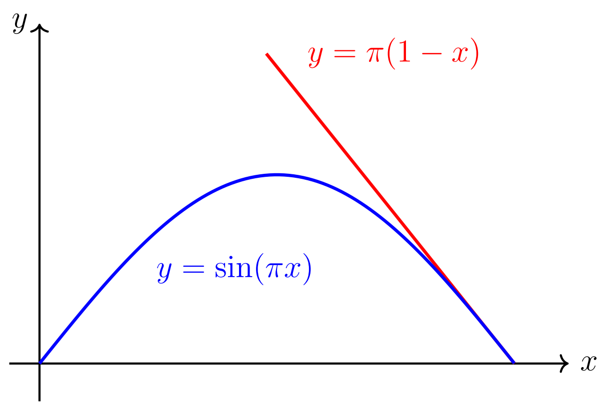
Exercice 7 (**)

On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$

Étudier le mode de convergence de la suite $(f_n)_n$.

Corrigé : On a $f_n(1) = 0$ pour n entier et $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $x \in [\,0\,;1\,[$. Ainsi, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Par concavité, on a

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)$$



Il s'ensuit $\quad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant g_n(x) \quad$ avec $\quad g_n(x) = \pi x^n(1-x)$

Après étude de fonction, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\pi}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi \mathrm{e}^{-1}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On conclut $\quad \boxed{\text{La suite } (f_n)_n \text{ converge uniformément vers la fonction nulle.}}$

Exercice 8 (**)

Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues sur un intervalle I est uniformément continue.

Corrigé : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions uniformément continues sur I et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit N entier tel que $f - f_{\mathrm{N}}$ bornée avec $\|f - f_{\mathrm{N}}\| \leqslant \varepsilon$. Soit $(x,y) \in \mathrm{I}^2$. Par inégalité triangulaire, on obtient

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_{\mathrm{N}}(x)| + |f_{\mathrm{N}}(x) - f_{\mathrm{N}}(y)| + |f_{\mathrm{N}}(y) - f(y)| \leqslant 2\varepsilon + |f_{\mathrm{N}}(x) - f_{\mathrm{N}}(y)|$$

Par uniforme continuité de f_{N}, on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$|x-y| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f_{\mathrm{N}}(x) - f_{\mathrm{N}}(y)| \leqslant \varepsilon$$

d'où

$$|x-y| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant 3\varepsilon$$

ce qui prouve l'uniforme continuité de f. On conclut

$$\boxed{\text{Une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.}}$$

Exercice 9 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et $a \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_p \leqslant b$. Montrer

$$\exists (\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}} \qquad \begin{cases} \mathrm{P}_n \to f \text{ uniformément sur } [\,a\,;b\,] \\ \mathrm{P}_n(a_k) = f(a_k) \quad \forall k \in [\![\,1\,;\,p\,]\!] \end{cases}$$

Corrigé : D'après le théorème de Weierstrass, il existe $(\mathrm{Q}_n)_n$ suite de polynômes tels que

$$\|\mathrm{Q}_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On note $(\mathrm{L}_k)_{k\in[\![\,1\,;\,p\,]\!]}$ les polynômes de Lagrange associés à $(a_1,\ldots,a_p)$ et on pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n = \mathrm{Q}_n + \sum_{k=1}^{p} [f(a_k) - \mathrm{Q}_n(a_k)]\,\mathrm{L}_k$$

Il s'agit bien d'une suite de polynômes et on a

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![\,1\,;\,p\,]\!] \qquad \mathrm{P}_n(a_i) &= \mathrm{Q}_n(a_i) + \sum_{k=1}^{p} [f(a_k) - \mathrm{Q}_n(a_k)]\,\underbrace{\mathrm{L}_k(a_i)}_{=\delta_{i,k}} \\ &= \mathrm{Q}_n(a_i) + f(a_i) - \mathrm{Q}_n(a_i) = f(a_i) \end{aligned}$$

Enfin

$$\|\mathrm{P}_n - f\|_\infty \leqslant \|\mathrm{Q}_n - f\|_\infty + \sum_{k=1}^{p} \|f - \mathrm{Q}_n\|_\infty \times \|\mathrm{L}_k\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi

$$\boxed{\exists (\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}} \qquad \begin{cases} \mathrm{P}_n \to f \text{ uniformément sur } [\,a\,;b\,] \\ \mathrm{P}_n(a_k) = f(a_k) \quad \forall k \in [\![\,1\,;\,p\,]\!] \end{cases}}$$

Exercice 10 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ et $(\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]^\mathbb{N}$ telle que $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CS}} f$. Montrer

$$\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f$$

Corrigé : On choisit $0 \leqslant x_0 < \ldots < x_\mathrm{N} \leqslant 1$ et $\mathscr{L} = (\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant \mathrm{N}}$ la base de polynômes de Lagrange associée, *i.e.* on a $\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$ pour tout $i \in [\![\,0\,;\,\mathrm{N}\,]\!]$ et $\mathrm{L}_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $0 \leqslant i, j \leqslant \mathrm{N}$. La décomposition de P_n dans $\mathscr{L}$ s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_n(x_i)\mathrm{L}_i$$

Les suites coordonnées de $(\mathrm{P}_n)_n$ convergent par convergence simple de $(\mathrm{P}_n)_n$. Ainsi, la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ converge vers $\sum\limits_{i=0}^{\mathrm{N}} f(x_i)\mathrm{L}_i$ pour la norme $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{L}}$ et comme celle-ci est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\infty,[\,0\,;1\,]}$ sur l'espace de dimension finie $\mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$, on en déduit que

$$\|\mathrm{P}_n - \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} f(x_i)\mathrm{L}_i\|_{\infty,[\,0\,;1\,]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

La convergence uniforme implique la convergence simple d'où $f = \sum\limits_{i=0}^{\mathrm{N}} f(x_i)\mathrm{L}_i$ par unicité de la limite pour la convergence simple. On conclut

$$\boxed{\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f \quad \text{avec} \quad f = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} f(x_i)\mathrm{L}_i}$$

Exercice 11 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout n entier. Montrer que $f = 0$.

Corrigé : Par linéarité du produit et de l'intégrale, il vient

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \int_0^1 f(t)\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

L'idée consiste, d'après le théorème de Weierstrass, à approcher en un certain sens f par P dans cette égalité pour aboutir à $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\|\mathrm{P} - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Puis

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\left[f(t) - \mathrm{P}(t) + \mathrm{P}(t)\right]\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(f-\mathrm{P})(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

Par hypothèse sur f, il s'ensuit

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(f-\mathrm{P})(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty\|f-\mathrm{P}\|_\infty \leqslant \varepsilon\|f\|_\infty$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et la fonction f^2 étant continue et positive sur $[\,0\,;1\,]$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est nulle.}}$$

Variante : Soit $f \in \mathrm{E}$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f$. On vérifie sans difficulté

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f^2 - f\mathrm{P}_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|f - \mathrm{P}_n\|_\infty = \mathrm{o}(1)$$

ce qui prouve $f\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f^2$. Il en résulte

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, on a $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout n entier. Il s'agit donc d'une suite constante nulle et on obtient $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On conclut comme précédemment.

Remarque : Notant $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$, on munit l'espace du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ pour $(f, g) \in \mathrm{E}^2$. Dans un espace préhilbertien réel, on peut montrer que pour F sev de E, on a $\mathrm{F}^\perp = \bar{\mathrm{F}}^\perp$. On montre ici que $\mathbb{R}[\mathrm{X}]^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$ d'où $\overline{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$. L'adhérence $\overline{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}$ s'entend en sens de la norme euclidienne. D'après le théorème de Weierstrass, on a $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ dense dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Or, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que la norme euclidienne et il s'ensuit que $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est dense dans E pour la norme euclidienne, autrement dit $\overline{\mathbb{R}[\mathrm{X}]} = \mathrm{E}$ d'où le résultat obtenu.