ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°44

Exercice 1 (***)

On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[\,0\,;n\,]}(x)$

Étudier le mode de convergence de $(f_n)_n$.

Corrigé : On a $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-x}$. L'inégalité de concavité $\ln(1+u) \leqslant u$ pour u réel donne

$$\forall x \in [\,0\,;n\,] \qquad |f_n(x) - f(x)| = \mathrm{e}^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x}\left(1 - \mathrm{e}^{x+n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}\right)$$

On pose
$$g_n(x) = x + n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$$

On a $g \in \mathscr{C}^1([\,0\,;n\,[\,,\mathbb{R})$ et $g_n'(x) = \dfrac{-x/n}{1-x/n}$ pour $x \in [\,0\,;n\,[$. Ainsi, la fonction g_n décroît donc $1 - \exp \circ g_n$ croît et $g_n(0) = 0$ donc g_n négative. Il vient

$$\forall x \in [\,\sqrt{n}\,;n\,] \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$$

et
$$\forall x \in [\,0\,;\sqrt{n}\,] \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1 - \mathrm{e}^{g_n(\sqrt{n})} = \mathrm{o}(1)$$

Enfin
$$\forall x \geqslant n \qquad |f_n(x) - f(x)| = \mathrm{e}^{-n}$$

On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ avec } f(x) = \mathrm{e}^{-x} \text{ pour } x \geqslant 0.}$$

Variante : Soit n entier non nul. On peut aussi étudier $f - f_n$ spécifiquement sur $]\,0\,;n\,[$. La fonction y est dérivable et on a

$$\forall x \in \,]\,0\,;n\,[\qquad (f - f_n)'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

Si le maximum est atteint en $x_n \in \,]\,0\,;n\,[$, alors on a

$$\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^{-x_n}$$

Puis
$$(f - f_n)(x_n) = \mathrm{e}^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x_n}\left(1 - 1 + \frac{x_n}{n}\right) = \frac{x_n \mathrm{e}^{-x_n}}{n}$$

Une étude de la fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$ montre que celle-ci est majorée par e^{-1} et on en déduit

$$0 \leqslant (f - f_n)(x_n) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$$

et par suite
$$\|f - f_n\|_\infty \leqslant \max\left(\mathrm{e}^{-n}, \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$$

Le résultat suit.

Exercice 2 (***)

On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f avec $f_n \geqslant f$.
2. Établir $\qquad \forall t \geqslant 0 \qquad t - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$

   En déduire la convergence uniforme de (f_n) sur $[\,0\,;a\,]$ avec $a > 0$.
3. Montrer que la convergence uniforme a lieu en fait sur $\mathbb{R}_+$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. On a pour $x \geqslant 0$

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-n\left(\frac{x}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-x+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-x}$$

Par concavité, on a $\ln(1+u) \leqslant u$ pour $u \geqslant 0$ d'où

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f_n(x) = \mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} \geqslant \mathrm{e}^{-n\frac{x}{n}} = \mathrm{e}^{-x}$$

Ainsi

$\boxed{\text{La suite } (f_n)_n \text{ converge simplement vers } f \text{ avec } f_n \geqslant f \text{ pour tout } n \text{ entier non nul avec } f(x) = \mathrm{e}^{-x} \text{ pour tout } x \geqslant 0.}$

2. Soit h définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(t) = \ln(1+t)$ pour $t \geqslant 0$. On a $h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec

$$\forall t \geqslant 0 \qquad h'(t) = \frac{1}{1+t} \quad \text{et} \quad h''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$$

On en déduit $|h''(t)| \leqslant 1$ pour $t \geqslant 0$ et d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\forall t \geqslant 0 \qquad |\ln(1+t) - t| \leqslant \frac{t^2}{2}$$

d'où $\qquad \forall t \geqslant 0 \qquad t - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t)$

En complétant avec l'inégalité de concavité, on conclut

$$\boxed{\forall t \geqslant 0 \qquad t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t}$$

On en déduit $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{e}^{-x} \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2n}} \leqslant \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\frac{a^2}{2n}}$

d'où $\qquad 0 \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{\frac{a^2}{2n}} - 1\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{a^2}{2n}} - 1$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{La suite } (f_n)_n \text{ converge vers } f \text{ uniformément sur } [\,0\,;a\,] \text{ avec } a > 0.}$

3. Les fonctions f_n et f sont bornées. Pour $a > 0$, on a

$$\forall x \geqslant 0 \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,[\,0\,;a\,]} + \|f_n - f\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[}$$

Comme les fonctions f_n et f décroissent, on trouve

$$\forall x \geqslant a \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant f_n(x) + f(x) \leqslant f_n(a) + f(a) = f_n(a) - f(a) + 2f(a)$$

Pour $\varepsilon > 0$, on peut choisir $a > 0$ tel que $2f(a) \leqslant \varepsilon$ puis un seuil N tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait

$$f_n(a) - f(a) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \|f_n - f\|_{\infty,[\,0\,;a\,]} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $\qquad \forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \forall x \geqslant 0 \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon$

Finalement $\qquad \boxed{\text{La suite } (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f.}$

Exercice 3 (***)

Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $[\,0\,;1\,]$ par

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{P}_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_{n+1}(x) = \mathrm{P}_n(x) + \frac{1}{2}\,(x - \mathrm{P}_n^2(x))$$

1. Établir $\quad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$
2. En déduire que $(\mathrm{P}_n)_n$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[\,0\,;1\,]$.
3. Construire une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[\,-1\,;1\,]$.

Corrigé : 1. Soit n entier et $x \in [\,0\,;1\,]$. On observe

$$\sqrt{x} - \mathrm{P}_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x))\left(1 - \frac{\sqrt{x} + \mathrm{P}_n(x)}{2}\right)$$

On procède ensuite par récurrence. Pour n entier, on note

$$\mathscr{P}(n): \quad \forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

L'initialisation $\mathscr{P}(0)$ est immédiate. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n entier fixé. Pour $x \in [\,0\,;1\,]$, on a $0 \leqslant \mathrm{P}_n(x) \leqslant \sqrt{x}$ par hypothèse de récurrence et par suite

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant 1 - \sqrt{x} \leqslant 1 - \frac{\sqrt{x} + \mathrm{P}_n(x)}{2} \leqslant 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$$

d'où $\qquad \forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \sqrt{x} - \mathrm{P}_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n+1}$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n}$

2. Posons $\varphi_n(u) = u\left(1 - \dfrac{u}{2}\right)^n$ pour $u \in [\,0\,;1\,]$ et n entier. Après étude de fonction, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|\varphi_n\|_\infty = \varphi_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\mathrm{e}^{-1}}{n}$$

Avec l'encadrement de la question précédente, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x) \leqslant \|\varphi_n\|_n$$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{La suite } (\mathrm{P}_n)_n \text{ converge uniformément vers la fonction } \sqrt{\cdot}.}$

3. Pour n entier, on choisit Q_n défini par $\mathrm{Q}_n(x) = \mathrm{P}_n(x^2)$ pour $x \in [\,-1\,;1\,]$. Par récurrence immédiate, la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ est une suite de fonctions polynomiales et par conséquent $(\mathrm{Q}_n)_n$ également. Puis, on a

$$\operatorname*{Sup}_{x\in[\,-1\,;1\,]} |\mathrm{Q}_n(x) - |x|| = \operatorname*{Sup}_{x\in[\,-1\,;1\,]} \left|\mathrm{P}_n(x^2) - \sqrt{x^2}\right| = \operatorname*{Sup}_{u\in[\,0\,;1\,]} |\mathrm{P}_n(u) - \sqrt{u}|$$

D'après le résultat de la question précédente, on conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite } (\mathrm{Q}_n)_n \text{ est une suite de fonctions polynomiales} \\ \text{qui converge uniformément vers la fonction } |\cdot|.\end{array}}$$

Remarque : Cet exercice est sans doute inspirée par la méthode de Newton appliquée à la fonction $f : u \mapsto u - x^2$. On définit la suite $(u_n)_n$ avec $u_0 \in [\sqrt{x}\,;1]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{x - u_n^2}{2u_n}$$

On vérifie $f([\sqrt{x}\,;1]) \subset [\sqrt{x}\,;1]$. On en déduit $\sqrt{x} \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout n entier et par suite

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{x - u_n^2}{2u_n} \geqslant u_n + \frac{x - u_n^2}{2}$$

ce qui motive l'étude de la suite de fonctions étudiée dans l'exercice.

Exercice 4 (***)

On définit la suite de fonctions $(u_n)_n$ sur $[0\,;1]$ par

$$\forall x \in [0\,;1] \qquad u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer $\qquad \forall (x,n) \in [0\,;1] \times \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. En déduire la convergence simple de $(u_n)_n$.
3. Montrer que $(u_n)_n$ converge uniformément vers u non nulle solution de $u'(x) = u(x - x^2)$.

Corrigé : 1. On remarque tout d'abord qu'on a bien $t - t^2 = t(1-t) \in [0\,;1]$ pour $t \in [0\,;1]$. Pour n entier, on note

$$\mathscr{P}(n): \quad \forall x \in [0\,;1] \qquad 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a $u_1(x) = 1 + x$ d'où $0 \leqslant u_1(x) - u_0(x) = x$ pour tout $x \in [0\,;1]$ ce qui prouve $\mathscr{P}(1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n entier fixé. Pour $x \in [0\,;1]$, on a par linéarité de l'intégrale

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x [u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2)]\,\mathrm{d}t$$

avec $\qquad \forall t \in [0\,;1] \qquad 0 \leqslant u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \leqslant \dfrac{(t(1-t))^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$

Ainsi $\qquad 0 \leqslant u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$

ce qui clôt la récurrence. On a donc

$$\boxed{\forall (x,n) \in [0\,;1] \times \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

2. Soit $x \in [0\,;1]$. La série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge (série exponentielle, critère de d'Alembert). Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum [u_{n+1}(x) - u_n(x)]$ converge. Alors, d'après le théorème sur les séries téléscopiques, on en déduit la convergence de la suite $(u_n(x))_n$ autrement

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (u_n)_n \text{ converge simplement.}}$$

3. D'après le théorème fondamental d'intégration, on vérifie par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ donc *a fortiori* continues sur $[0\,;1]$. On a pour n entier

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \sum_{k=n}^{+\infty} [u_{k+1}(x) - u_k(x)] = u(x) - u_n(x) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \mathrm{o}(1)$$

On en déduit la convergence uniforme de $(u_n)_n$ vers u qui est donc continue sur $[\,0\,;1\,]$ comme limite uniforme de telles fonctions. Pour $x \in [\,0\,;1\,]$, comme $t - t^2 \in [\,0\,;1\,]$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$, il vient

$$\forall t \in [\,0\,;x\,] \qquad |u_n(t-t^2) - u(t-t^2)| \leqslant \|u_n - u\|_\infty$$

Ainsi, par convergence uniforme

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + \int_0^x u(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

Par unicité de la limite, on obtient

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad u(x) = 1 + \int_0^x u(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

On a $u(0) = 1$ et d'après le théorème fondamental d'intégration, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge uniformément vers } u \text{ non nulle solution de } u'(x) = u(x-x^2).}$$

Exercice 5 (***)

Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ une suite de polynômes réels.

1. On suppose que $(\mathrm{P}_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est polynomiale.
2. On suppose que $(\mathrm{P}_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur tout segment de $\mathbb{R}$. Le résultat précédent persiste-t-il ?

Corrigé : 1. Il existe un entier N tel que $\|\mathrm{P}_n - f\|_\infty \leqslant 1$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$. Alors, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on a

$$\|\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_\mathrm{N}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{P}_n - f\|_\infty + \|f - \mathrm{P}_\mathrm{N}\|_\infty \leqslant 2$$

Ainsi, le polynôme $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_\mathrm{N}$ est borné donc constant d'où $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_\mathrm{N} = \alpha_n$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$. Puis

$$\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_\mathrm{N} \xrightarrow[n\to\infty]{} f - \mathrm{P}_\mathrm{N} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_n - \mathrm{P}_\mathrm{N} = \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$$

Par unicité de la limite, il s'ensuit que $f = \alpha + \mathrm{P}_\mathrm{N}$ et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est polynomiale.}}$$

2. Une telle fonction est clairement continue sur $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit n entier non nul. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel

$$\|\mathrm{P}_n - f\|_{\infty,[\,-n\,;n\,]} \leqslant \frac{1}{n}$$

La suite de polynômes ainsi construite converge uniformément vers f sur tout segment puisque tout segment est inclus dans $[\,-n\,;n\,]$ à partir d'un certain rang. On conclut

$$\boxed{\text{Les fonctions solutions sont exactement les fonctions continues sur } \mathbb{R}.}$$

Exercice 6 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$.

1. Étudier le comportement asymptotique de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.

2. En déduire les comportements de de $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. Soit $\varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et $(a_i)_{i\in[\![0\,;p]\!]}$ une subdivision adaptée à φ avec $\varphi_{|]\,a_j\,;a_{j+1}\,[} = \lambda_j$ scalaire pour tout $j \in [\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$. On a pour n entier

$$\int_a^b \varphi(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{p-1}\lambda_j\int_{a_j}^{a_{j+1}}\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{p-1}\lambda_j\left[\mathrm{e}^{int}\right]_{a_j}^{a_{j+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ telle que $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon/(b-a)$. Par suite

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \left|\int_a^b [f(t)-\varphi(t)]\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b \varphi(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant (b-a)\|f-\varphi\|_\infty + \left|\int_a^b \varphi(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

Il existe N entier tel que pour $\left|\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$ et on a donc

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Ainsi
$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Remarque : On peut comprendre intuitivement ce résultat. Quand n est très grand, la période de $t \mapsto \mathrm{e}^{int}$ est très courte et la fonction f « semble » constante sur une période très courte. L'intégrale d'une fonction constante multipliée par $t \mapsto \mathrm{e}^{int}$ est nulle sur une période ce qui explique le phénomène observé. Ce résultat s'intitule *lemme de Lebesgue-Riemann*. Il existe une version « perfusée » de ce résultat où f est supposée de classe $\mathscr{C}^1$: la preuve s'obtient alors par simple intégration par parties.

Variante : On peut établir le résultat par double limite. Soit $(\varphi_k)_k$ à valeurs dans $\mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ telle que $\varphi_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f$. On pose

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_k(n) = \int_a^b \varphi_k(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v(n) = \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$$

On a $\quad \forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad |u_k(n) - v(n)| = \left|\displaystyle\int_a^b [\varphi_k(t) - f(t)]\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\|\varphi_k - f\|_\infty$

d'où $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathrm{CU}} v$. Par double limite, la suite $(v(n))_n$ converge avec

$$v(n) = \lim_{k\to+\infty} u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lim_{n\to+\infty}\lim_{k\to+\infty} u_k(n) = \lim_{k\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_k(n) = 0$$

et on retrouve le résultat annoncé.

2. Considérant partie réelle et imaginaire de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$ pour n entier, on conclut

$$\boxed{\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Remarque : Les résultats qui précédent s'étendent sans difficulté au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7 (***)

Pour n entier non nul et $f \in \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{S}_n(f) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \ldots \left(\int_0^1 f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)\,\mathrm{d}x_1\right)\,\mathrm{d}x_2\ldots\right)\,\mathrm{d}x_n$$

1. Soit $r \geqslant 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{rx}$ pour $x \in [0;1]$. Montrer qu'il existe $a \in [0;1]$ tel que

$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$

2. Soit f définie par $f(x) = \mathrm{P}(\mathrm{e}^x)$ pour $x \in [0;1]$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer

$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$

3. En déduire que pour $f \in \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. On suppose $r > 0$. Par propriété fondamentale de l'exponentielle, on trouve

$$\mathrm{S}_n(f) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \ldots \left(\int_0^1 \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{\frac{r}{n}x_i}\,\mathrm{d}x_1\right)\,\mathrm{d}x_2\ldots\right)\,\mathrm{d}x_n$$

On intègre successivement en x_1, x_2, ... Il s'ensuit

$$\mathrm{S}_n(f) = \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{r}{n}x}\,\mathrm{d}x\right)^n = \left(\frac{n}{r}\right)^n \left(\mathrm{e}^{\frac{r}{n}} - 1\right)^n = \exp\left[n\left(-\ln\left(\frac{r}{n}\right) + \ln \mathrm{e}^{\frac{r}{n}} + \ln(1 - \mathrm{e}^{-\frac{r}{n}})\right)\right]$$

Avec le développement usuel $\qquad \mathrm{e}^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$

on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_n(f) &= \exp\left[n\left(-\ln\left(\frac{r}{n}\right) + \frac{r}{n} + \ln\left(\frac{r}{n} - \frac{r^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\right]\\ &= \exp\left[r + n\ln\left(1 - \frac{r}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\end{aligned}$$

Le développement usuel $\ln(1-u) = u + \mathrm{o}(u)$ donne $\mathrm{S}_n(f) = \exp\left[r - \dfrac{r}{2} + \mathrm{o}(1)\right]$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Remarque : Le résultat vaut encore pour $r = 0$.

2. Soit n entier non nul. Par linéarité de l'intégrale, l'application S_n est une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ et par combinaison linéaire, on obtient

$$\boxed{\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{S}_n(\mathrm{P}\circ\exp) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{P}\circ\exp\left(\frac{1}{2}\right)}$$

3. Soit n entier non nul. Posons $g(t) = f(\ln t)$ pour $t \in [1;\mathrm{e}]$. Pour $\varepsilon > 0$, le théorème de Weierstrass garantit l'existence de $\mathrm{P}_\varepsilon \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall t \in [\,1\,;\mathrm{e}\,] \qquad |\mathrm{P}_\varepsilon(t) - g(t)| \leqslant \varepsilon$$

Par suite, notant $x = \ln t$, il vient

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad |\mathrm{P}_\varepsilon(\mathrm{e}^x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Par commodité, on confond polynôme et fonction polynomiale. Notant $\phi_\varepsilon = \mathrm{P}_\varepsilon \circ \exp$, il suffit alors d'écrire, par linéarité de S_n et par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{S}_n(f) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \left|\mathrm{S}_n(f-\phi_\varepsilon) + \mathrm{S}_n(\phi_\varepsilon) - \phi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) + \phi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\ &\leqslant |\mathrm{S}_n(f-\phi_\varepsilon)| + \left|\mathrm{S}_n(\phi_\varepsilon) - \phi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \left|\phi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\end{aligned}$$

En appliquant n fois l'inégalité triangulaire, on a $|\mathrm{S}_n(f-\phi_\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$. D'après le résultat de la question précédente, on peut trouver un seuil N tel que $\left|\mathrm{S}_n(\phi_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(\frac{1}{2})\right| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, on a montré

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant \mathrm{N} \implies \left|\mathrm{S}_n(f) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant 3\varepsilon$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Remarque : On a démontré un cas particulier de *la loi faible des grands nombres* pour des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $[\,0\,;1\,]$, à savoir

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} f\left(\mathbb{E}(\mathrm{X})\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{X} \sim \mathscr{U}_{[\,0\,;1\,]} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\mathrm{X}) = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$$

Exercice 8 (***)

Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions k-lipschitzienne sur $[\,0\,;1\,]$ avec $k > 0$. Montre que si $(u_n)_n$ converge simplement, alors elle converge uniformément sur $[\,0\,;1\,]$.

Corrigé : Notons $u = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Pour $(x,y) \in [\,0\,;1\,]^2$, on a

$$|u(x) - u(y)| = \lim_{n\to+\infty} |u_n(x) - u_n(y)| \quad \text{et} \quad |u_n(x) - u_n(y)| \leqslant k\,|x-y|$$

d'où
$$|u(x) - u(y)| \leqslant k\,|x-y|$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ une subdivision de $[\,0\,;1\,]$ telle que $x_{i+1} - x_i \leqslant \varepsilon/k$ pour $i \in [\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$. Il existe N entier tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on a $|u_n(x_i) - u(x_i)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $i \in [\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$ (nombre <u>fini</u> de points à contrôler). Pour $x \in [\,0\,;1\,]$, il existe $i \in [\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$ tel que $x \in [\,x_i\,;x_{i+1}\,]$. On a pour $n \geqslant \mathrm{N}$

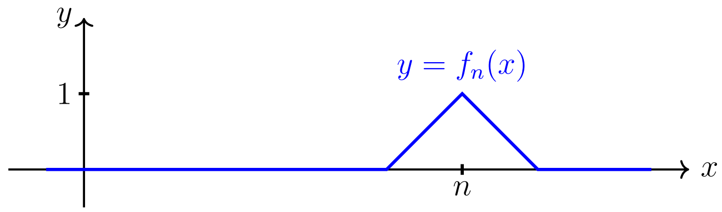
$$\begin{aligned}|u(x) - u_n(x)| &= |u(x) - u(x_i) + u(x_i) - u_n(x_i) + u_n(x_i) - u_n(x)| \\ &\leqslant |u(x) - u(x_i)| + |u(x_i) - u_n(x_i)| + |u_n(x_i) - u_n(x)| \\ |u(x) - u_n(x)| &\leqslant 2k\,|x - x_i| + |u(x_i) - u_n(x_i)| \leqslant 3\varepsilon\end{aligned}$$

Comme le choix de N ne dépend que de ε, on conclut

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} u}$$

Remarque : On peut remplacer $[\,0\,;1\,]$ par un intervalle borné et le résultat a encore lieu. En revanche, sur un intervalle non borné, le résultat est faux. On peut considérer par exemple

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \max(0, 1 - |x-n|)$$



On a $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CS}} f = 0$ mais $f_n(n) = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ ce qui prouve qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Exercice 9 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,], \mathbb{K})$. Déterminer

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\ \mathrm{d}t$$

Corrigé : Soit $\alpha \geqslant 0$ et $\lambda > 0$. Le changement de variable $u = \lambda t$ donne

$$\int_0^\alpha |\sin(\lambda t)|\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\alpha\lambda} |\sin u|\ \mathrm{d}u$$

La fonction $|\sin|$ est π-périodique. On va donc s'efforcer de mettre en valeur une intégrale sur un intervalle de longueur un multiple de π. On pose $n_\lambda = \left\lfloor \dfrac{\lambda\alpha}{\pi} \right\rfloor$. On a

$$\frac{\lambda\alpha}{\pi} - 1 < n_\lambda \leqslant \frac{\lambda\alpha}{\pi} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \lambda\alpha - n_\lambda\pi < \pi$$

D'après la relation de Chasles, comme n_λ est un entier naturel (du fait du choix $\alpha \geqslant 0$), il vient

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\alpha\lambda} |\sin u|\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n_\lambda - 1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u|\ \mathrm{d}u + \frac{1}{\lambda}\int_{n_\lambda\pi}^{\lambda\alpha} |\sin u|\ \mathrm{d}u$$

On a

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u|\ \mathrm{d}u = \int_0^\pi \sin u\,\mathrm{d}u = 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \int_{n_\lambda\pi}^{\lambda\alpha} |\sin u|\ \mathrm{d}u \leqslant \lambda\alpha - n_\lambda\pi < \pi$$

Ainsi
$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\alpha\lambda} |\sin u|\ \mathrm{d}u \underset{\lambda\to+\infty}{=} \frac{2n_\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\mathrm{O}(1)$$

D'après un encadrement précédemment établi, on a clairement $n_\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda\alpha}{\pi}$ et par conséquent

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\alpha\lambda} |\sin u|\ \mathrm{d}u \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{2\alpha}{\pi}$$

Si $\alpha \leqslant 0$, le changement de variables $u = -\lambda t$ permet de se ramener à la situation précédente. Pour α, β réels, il vient

$$\int_\alpha^\beta |\sin(\lambda t)|\ \mathrm{d}t = \int_0^\beta |\sin(\lambda t)|\ \mathrm{d}t - \int_0^\alpha |\sin(\lambda t)|\ \mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}(\beta - \alpha)$$

Soit $\varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,], \mathbb{K})$ et $(a_i)_{i\in[\![\,0\,;\,n\,]\!]}$ une subdivision de $[\,a\,;b\,]$ adaptée à la fonction φ. Pour tout $i \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$, il existe γ_i scalaire tel que $\varphi_{|\,]\,a_i\,;a_{i+1}\,[} = \gamma_i$. Par suite

$$\int_a^b \varphi(t)\,|\sin(\lambda t)|\;\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\sin(\lambda t)|\;\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i(a_{i+1}-a_i) = \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Généralisons ce résultat pour toute fonction continue par morceaux. Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{K})$ tel que $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Il vient par inégalité triangulaire pour $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\;\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \\ &\qquad \left|\int_a^b (f-\varphi)(t)\,|\sin(\lambda t)|\;\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b \varphi(t)\,|\sin(\lambda t)|\;\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\frac{2}{\pi}\int_a^b (\varphi-f)(t)\,\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

Il existe un seuil $\Lambda \geqslant 0$ tel que pour $\lambda \geqslant \Lambda$, on ait

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,|\sin(\lambda t)|\;\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $$\left|\int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\;\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon\left(\left(1+\frac{2}{\pi}\right)(b-a)+1\right)$$

avec un majorant qu'on peut choisir arbitrairement petit. On conclut

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\;\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Variante : On peut établir le résultat par double limite. Soit $(\varphi_n)_n$ à valeurs dans $\mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f$. On pose

$$\forall (n,\lambda) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}_+ \qquad u_n(\lambda) = \int_a^b \varphi_n(t)\,|\sin(\lambda t)|\;\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v(\lambda) = \int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\;\mathrm{d}t$$

On a

$$\forall (n,\lambda) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}_+ \qquad |u_n(\lambda)-v(\lambda)| = \left|\int_a^b [\varphi_n(t)-f(t)]\,|\sin(\lambda t)|\;\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\|\varphi_n-f\|_\infty$$

d'où $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} v$. Par double limite, la fonction v admet une limite en $+\infty$ avec

$$v(\lambda) = \lim_{n\to+\infty} u_n(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \lim_{\lambda\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_n(\lambda) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{\lambda\to+\infty} u_n(\lambda) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

et par convergence uniforme $$\frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On retrouve le résultat annoncé.