ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°46

Exercice 1 (*)

Étudier la convergence simple et normale de la série de fonctions $\sum f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

Corrigé : On a $f_n(0) = 0$ pour n entier et $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées. On en déduit la convergence simple de $\sum f_n$. Pour n entier, la fonction f_n dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f_n'(x) = nx\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}(2 - \sqrt{n}x)$$

Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 4\mathrm{e}^{-2}$$

La série $\sum \|f_n\|_\infty$ est donc grossièrement divergente. Comme le maximum de f_n est atteint en $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on en déduit que pour $a > 0$, comme $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant a$ pour n assez grand, on a

$$\|f_n\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} = f_n(a)$$

On conclut

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+\text{, par normalement sur } \mathbb{R}_+ \text{ mais normalement sur tout intervalle } [\,a\,;+\infty\,[\text{ avec } a > 0.}$$

Remarque : Supposons que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Alors, on a R_n bornée pour n assez grand avec $\|\mathrm{R}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mais aussi

$$\|f_n\|_\infty = \|\mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_n\|_\infty \leqslant \|\mathrm{R}_{n-1}\|_\infty + \|\mathrm{R}_n\|_\infty = \mathrm{o}(1)$$

ce qui est absurde. On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 (*)

Étudier la convergence simple et normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = \frac{nx}{n^4 + x^2}$$

Corrigé : On a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ donc la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ par comparaison et critère de Riemann. Pour n entier non nul, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f_n'(x) = \frac{n(n^4 - x^2)}{(n^4 + x^2)^2}$$

Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|f_n\|_\infty = f_n(n^2) = \frac{n^3}{2n^4} = \frac{1}{2n}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty$ diverge. Comme le maximum de f_n est atteint en $n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, on en déduit que pour $a \geqslant 0$, comme $n^2 \geqslant a$ pour n assez grand, on a

$$\|f_n\|_{\infty,[\,0\,;a\,]} = f_n(a)$$

On conclut

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+\text{, par normalement sur } \mathbb{R}_+ \text{ mais normalement sur tout intervalle } [\,0\,;a\,] \text{ avec } a \geqslant 0.}$$

Remarque : Soit n entier non nul. On a

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{R}_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kx}{k^4+x^2} \geqslant n\frac{nx}{(2n)^4+x^2}$$

d'où
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{R}_n(n^2) \geqslant \frac{1}{2^4+1}$$

ce qui prouve que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$. On peut aussi procéder par comparaison série/intégrale. Pour $x \geqslant 0$, on pose

$$\forall t > 0 \qquad \varphi_x(t) = \frac{tx}{t^4+x^2}$$

On a φ_x dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec

$$\forall t > 0 \qquad \varphi_x'(t) = \frac{x(x^2-3t^4)}{(t^4+x^2)^2}$$

Ainsi, la fonction φ_x décroît sur $\left]\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{3}}\,;+\infty\right[$ et pour $n+1 \geqslant \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{3}}$, en exploitant la relation fondamentale de Arctan, on trouve

$$\mathrm{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_x(k) \geqslant \int_{n+1}^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{(n+1)^2}\right)$$

Pour $x = (n+1)^2$, on a bien $n+1 \geqslant \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{3}}$ et on obtient alors

$$\mathrm{R}_n(n+1) \geqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{8}$$

d'où le résultat.

Exercice 3 (*)

On pose
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$$

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Corrigé : 1. On pose
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \qquad u_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de fonctions continues et on a $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^2}$ pour tout n entier non nul. La convergence normale et donc uniforme s'ensuit. Par théorème, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction S est bien définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. Pour x réel fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+x^2}$ est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$, décroissante et intégrable par comparaison et critère de Riemann. Ainsi, par comparaison série/intégrale, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \iff \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \frac{\pi}{2x}$$

On conclut

$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}}$$

Exercice 4 (*)

On pose

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{x+k}\right)$$

1. Montrer que S est définie et continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer une relation entre $\mathrm{S}(x)$ et $\mathrm{S}(x+1)$ pour $x > 0$.
3. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to +\infty$ et $x \to 0$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{x+k}\right)$

La série $\sum u_n$ est une série de fonctions continues. Pour $a > 0$, on a

$$\|u_n\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} \leqslant \frac{1}{an!}$$

Ainsi, la série converge normalement et donc uniformément sur tout intervalle $[\,a\,;+\infty\,[$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction S est bien définie et continue.}}$$

2. Soit $x > 0$. On a

$$\mathrm{S}(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n+1} \frac{1}{x+k} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}$$

D'où

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x+1) - x\mathrm{S}(x) = -1}$$

3. On a

$$\mathrm{S}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \mathrm{e} - 1$$

d'où

$$x\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{e}$$

puis

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \frac{1}{x} + \frac{\mathrm{S}(x+1)}{x}$$

Et par double limite, la convergence uniforme ayant lieu sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par exemple

$$\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$$

Ainsi

$$\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On conclut

$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{x} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$$

Exercice 5 (*)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Corrigé : On pose $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ qui converge simplement d'après le critère des séries alternées puisque pour $x \geqslant 0$, la suite $\left(\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ décroît et tend vers zéro. Par dérivation, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n'(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ vérifie elle-aussi le critère des séries alternées et par majoration du reste, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

D'où $$\|\mathrm{R}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ (donc sur tout segment) et on conclut

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

Exercice 6 (**)

On pose $$\forall x > 1 \qquad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,1\,;+\infty\,[$.
2. Préciser la monotonie et convexité de la fonction ζ.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x)$.
4. Déterminer un équivalent simple de $\zeta(x)$ pour $x \to 1^+$.
5. Étudier la convexité de $\ln \circ \zeta$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,1\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$

Pour n entier non nul, la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,1\,;+\infty\,[$. Soit k entier. On a

$$\forall x > 1 \qquad u_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{\ln(n)^k}{n^x}$$

d'où, pour $a > 1$ $$\|u_n^{(k)}\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} = \frac{\ln(n)^k}{n^a}$$

Avec $\alpha = \dfrac{1+a}{2}$, on a par croissances comparées $\dfrac{\ln(n)^k}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. On en déduit la convergence normale $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n^{(k)}$ série de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur tout intervalle $[\,a\,;+\infty\,[$ et ceci pour tout k entier d'où

$$\boxed{\zeta \in \mathscr{C}^\infty(]\,1\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

2. La fonction ζ décroît comme somme de fonctions décroissantes puis, par dérivation

$$\forall x > 1 \qquad \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)^2}{n^x} \geqslant 0$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est décroissante et convexe.}}$

3. Par convergence normale sur $[\,2\,;+\infty\,[$ par exemple, on a par double limite

$$\boxed{\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1}$$

4. Soit $x > 1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est continue, décroissante, positive sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Par comparaison série/intégrale, l'intégrale et la série sont de même nature (c'est du Riemann en fait !) et on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

D'où $\boxed{\zeta(x) \underset{x\to1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}}$

5. On a $\qquad \forall x > 1 \qquad (\ln\circ\zeta)''(x) \geqslant 0 \iff \zeta(x)\zeta''(x) - \zeta'(x)^2 \geqslant 0$

Soit $x > 1$ et N entier non nul. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, on a

$$\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\ln(n)}{n^x}\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\ln(n)}{n^{x/2}} \frac{1}{n^{x/2}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\ln(n)^2}{n^x}\right)$$

Faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$, toutes les sommes convergent et on obtient

$$\zeta'(x)^2 \leqslant \zeta(x)\zeta''(x)$$

On conclut $\boxed{\text{La fonction } \ln\circ\zeta \text{ est convexe.}}$

Exercice 7 (**)

Calculer pour $n \in \mathbb{Z}$ $\qquad \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}n\theta}}{1 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

Corrigé : Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'intégrale I_n est bien définie en tant qu'intégrale de fonction continue sur un segment puisque $\left|2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = 2$ ce qui garantit que le dénominateur de l'intégrande ne s'annule pas. On a

$$\mathrm{I}_n = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}n\theta}}{1 - \dfrac{\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\theta}}{2}}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n-1)\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}k\theta}}{2^k}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n-1-k)\theta}}{2^k}\,\mathrm{d}\theta$$

On pose $\qquad \forall (k,\theta) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \qquad u_k(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n-1-k)\theta}}{2^k}$

On a $\qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \|u_k\|_\infty = \dfrac{1}{2^k}$

terme de série géométrique convergente ce qui prouve la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum u_k$. Ainsi en intégrant terme à terme, on obtient

$$\mathrm{I}_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n-1-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta}_{=2\pi\delta_{n-1,k}}$$

On conclut $$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \mathrm{I}_n = -\frac{\pi}{2^{n-1}}}$$

Variante : La série $\sum \int_0^{2\pi} |u_k(\theta)|\,\mathrm{d}\theta = \sum \frac{1}{2^k}$ converge ce qui garantit l'intégration terme à terme et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 8 (**)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\mathrm{th}\,(x+n) - \mathrm{th}\,(n)]$$

1. Montrer que S est définie, continue, croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$ pour $x \geqslant 0$.
3. Étudier la convergence de S en $+\infty$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \mathrm{th}\,(x+n) - \mathrm{th}\,(n)$$

On a $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_\infty = 1 - \mathrm{th}\,(n)$$

puis $$1 - \mathrm{th}\,(n) = \frac{2\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^{n} + \mathrm{e}^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-2n}$$

La série $\sum 2\mathrm{e}^{-2n}$ est géométrique de raison e^{-2} d'où la convergence absolue de $\sum(1 - \mathrm{th}\,(n))$. La série de fonctions continues $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et comme il s'agit d'une somme de fonctions croissantes, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction S est définie, continue, croissante sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. Par linéarité du symbole somme, il vient

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\mathrm{th}\,(x+n+1) - \mathrm{th}\,(x+n)]$$

Par téléscopage $$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = 1 - \mathrm{th}\,(x)}$$

3. On a $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 - \mathrm{th}\,(n)$$

Comme la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[\,0\,;+\infty\,[$, il vient par double limite

$$\boxed{\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty}(1 - \mathrm{th}\,(n))}$$

Variante : L'énoncé laisse supposer une autre stratégie. La fonction S est croissante donc admet une limite éventuellement infinie en $+\infty$ par limite monotone. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} [\mathrm{S}(k+1) - \mathrm{S}(k)] = \sum_{k=0}^{n} [1 - \mathrm{th}\,(k)]$$

Comme la série $\sum(1 - \mathrm{th}\,(n))$ converge, la suite $(\mathrm{S}(n))_n$ admet une limite finie pour $n \to +\infty$ et le résultat suit.

Exercice 9 (**)

On pose

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f(x) = \begin{cases} -8x & \text{si } x \in \left[\,0\,;\dfrac{1}{8}\right] \\ 8x-2 & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{8}\,;\dfrac{1}{4}\right] \\ 0 & \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 2x-1$$

puis $$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f \circ \varphi^n(x)$$

où $\varphi^n = \varphi \circ \ldots \varphi$.

1. Montrer que S est bien définie, continue sur $[\,0\,;1\,]$.
2. Pour une fonction continue sur un segment, l'ensemble des points où elle atteint sa borne supérieure est-elle une réunion finie d'intervalles disjoints ?

Corrigé : On a $$\sum \left\| \frac{1}{2^n} f \circ \varphi^n \right\|_\infty = \sum \frac{1}{2^n} \text{ convergente}$$

d'où la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues définissant S. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction S bien définie, continue sur } [\,0\,;1\,].}$$

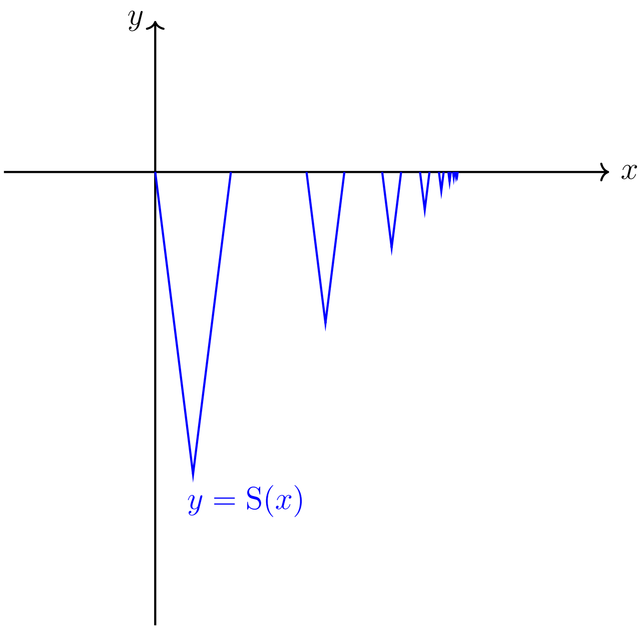

Figure 1 – Graphe de S

2. La fonction S est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ et atteint son maximum sur les intervalles de la forme $\left[\mathrm{S}_n - \dfrac{1}{2^{n+1}}\,;\mathrm{S}_n\right]$ avec $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ ce qui constitue donc une union infinie d'intervalles disjointes.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour } f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R}), \text{ l'ensemble } f^{-1}(\underset{[\,a\,;b\,]}{\mathrm{Max}}\, f) \text{ n'est} \\ \text{pas nécessairement union finie d'intervalles disjoints.}\end{array}}$$