Feuille d'exercices n°47

Exercice 1 (***)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que η est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Corrigé : On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ qui converge simplement d'après le critère des séries alternées puisque pour $x > 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ décroît et tend vers zéro. Par dérivation, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}\ln(n)}{n^x}$$

Par croissances comparées $$\forall x > 0 \qquad |u_n'(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pour $x > 0$ fixé, on pose $$\forall t > 0 \qquad \varphi(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$$

Cette fonction est dérivable avec

$$\forall t > 0 \qquad \varphi'(t) = \frac{1 - x\ln(t)}{t^{x+1}}$$

d'où la décroissance de φ sur $\left[\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,;+\infty\,\right[$. Ainsi, pour $x \in [\,a\,;b\,] \subset\,]\,0\,;+\infty\,[$, pour $n \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$, le critère des séries alternées s'applique et par majoration du reste, on a donc

$$|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

Ainsi $$\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[\,a\,;b\,]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge donc uniformément sur tout segment et on conclut

$$\boxed{\eta \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

Exercice 2 (***)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}\,(nx)}$$

1. Étudier le mode de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de la somme $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$ et $x \to 0$.

Corrigé : 1. Soit $x > 0$. On a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-xn}$ et $\sum \mathrm{e}^{-xn}$ converge en tant que série géométrique d'où la convergence simple d'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs. On a $\|u_n\|_\infty = +\infty$ pour tout n entier non nul ce qui entraîne qu'il n'y a pas convergence normale sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Supposons qu'il y ait convergence uniforme sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On aurait alors R_n borné à partir d'un certain rang et

$$\|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n-1}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{R}_n\|_\infty + \|\mathrm{R}_{n-1}\|_\infty$$

Mais avec l'égalité $\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n-1} = u_n$, on obtient une contradiction évidente puisque u_n n'est pas bornée sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Soit $a > 0$. On a

$$\|u_n\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} = \frac{1}{\mathrm{sh}\,(na)}$$

et on en déduit la convergence normale et donc uniforme sur $[\,a\,;+\infty\,[$ pour $a > 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge simplement sur }]\,0\,;+\infty\,[\text{ et normalement sur } [\,a\,;+\infty\,[\text{ pour tout } a > 0.}$$

2. Soit $x > 0$. La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(xu)}$ est continue, décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Par comparaison série/intégrale, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}\,(tx)} \leqslant \mathrm{S}(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}\ x} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}\,(nx)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}\ x} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}\,(tx)}$$

Avec le changement de variable $u = \mathrm{e}^{tx}$, il vient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}\,(tx)} = \int_1^{+\infty} \frac{2\mathrm{e}^{tx}}{\mathrm{e}^{2tx}-1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x}\int_{\mathrm{e}^x}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = \frac{1}{x}\left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_{\mathrm{e}^x}^{+\infty} = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$$

Puis $\quad \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\right) = \dfrac{1}{x}\left(\ln(\mathrm{e}^x+1) - \ln(x(1+\mathrm{o}(1))\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{\ln(x)}{x} \quad$ et $\quad \dfrac{1}{\mathrm{sh}\ x} \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{\ln(x)}{x}$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{\ln(x)}{x}}$

On a pour $x > 0$

$$\mathrm{S}(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}\ x} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}\,(nx)} = 2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x}) + \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sh}\,(nx)}$$

On pose $\quad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad v_n(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sh}\,(nx)} \quad$ et $\quad w_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sh}\,(nx)$

Pour n entier non nul, on a w_n dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec

$$\forall x > 0 \qquad w_n'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(-\,\mathrm{sh}\,(nx) + n\,\mathrm{ch}\,(nx)\right) \geqslant 0$$

On en déduit la croissance w_n et donc la décroissance de v_n. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|v_n\|_{\infty,[\,1\,;+\infty\,[} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{sh}\,(n)}$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de $\sum_{n\geqslant 2}^{+\infty} v_n$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Enfin, on a

$$\forall n \geqslant 2 \qquad v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-(n-1)x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème de double limite, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sh}\,(nx)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

D'où
$$\mathrm{S}(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x})$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-x}}$$

Exercice 3 (***)

On pose
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

1. Étudier la définition, la continuité et la dérivabilité de f.
2. Déterminer un équivalent de f en 1^-.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \qquad u_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$

Si $x \geqslant 1$ ou $x < -1$, on a $|u_n(x)| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ ce qui prouve la divergence grossière. La fonction n'est pas définie en $x=-1$. Si $|x|<1$, on a

$$|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$$

d'où la convergence absolue de $\sum u_n$ sur $]-1\,;1\,[$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie sur }]-1\,;1\,[.}$$

On a u_0 fonction constante. Soit $a \in [\,0\,;1\,[$. On a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [-a\,;a\,] \qquad \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \leqslant \frac{|x|^n}{1-|x|} \leqslant \frac{a^n}{1-a}$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum u_n$ sur tout segment de $]-1\,;1\,[$ d'où

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^0(]-1\,;1\,[,\mathbb{R})}$$

La série $\sum u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1\,[$ qui converge simplement. Par dérivation, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times\,]-1\,;1\,[\qquad u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

Soit $a \in [\,0\,;1\,[$. Il vient

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [-a\,;a\,] \qquad |u_n'(x)| \leqslant \frac{na^{n-1}}{(1-a)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi, la série $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $]-1\,;1\,[$ et par conséquent

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^1(]-1\,;1\,[,\mathbb{R})}$$

2. Soit $x \in\,]\,0\,;1\,[$. On pose $\ \forall t \geqslant 0 \qquad h_x(t) = \dfrac{x^t}{1+x^t} = 1 - \dfrac{1}{1+x^t}$

La fonction h_x est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$, décroissante et positive. Il vient par comparaison série/intégrale pour N entier

$$\int_0^{\mathrm{N}+1} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{2} + \int_0^{\mathrm{N}} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t$$

et faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$ puisque l'intégrale généralisée est de même nature que la série définissant f donc convergente, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = \mathrm{e}^{t\ln x}$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \frac{\ln(2)}{\ln(x)}$$

Il en résulte alors $\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(2)}{(1-x)}}$

Exercice 4 (***)

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$

Corrigé : On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$

En changeant l'ordre de sommation, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{k}{n}\right)^n$$

On pose $\forall (k,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \qquad u_k(n) = \left(1-\frac{k}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[\![\,0\,;\,n\,]\!]}(k)$

Avec l'inégalité de concavité classique $\ln(1-u) \leqslant -u$ pour $u<1$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|u_k\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^{-k}$$

d'où la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_k$ et comme on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-k}$$

On conclut $\boxed{\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}}$

Exercice 5 (***)

Soit $f_0 \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. On construit $(f_n)_n$ en posant $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$.

Étudier et évaluer la fonction $g : x \in [\,a\,;b\,] \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Corrigé : Par récurrence immédiate, on montre $f_n \in \mathscr{C}^n([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ pour n entier et on a $f_n' = f_{n-1}$ pour tout n entier non nul. Notons $\mathrm{M} = \sup\limits_{t\in[\,a\,;b\,]} |f(t)|$. Pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, on a

$$|f_1(x)| = \left|\int_a^x f_0(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x \mathrm{M}\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}(x-a)$$

puis $$|f_2(x)| = \left|\int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x \mathrm{M}(t-a)\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}\frac{(x-a)^2}{2}$$

procédé qu'on peut itérer. Notons

$$\mathscr{P}(n): \qquad \forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad |f_n(x)| \leqslant \mathrm{M}\frac{(x-a)^n}{n!}$$

La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Suposons $\mathscr{P}(n)$ vrais pour n entier. Il vient pour $x \in [\,a\,;b\,]$

$$|f_{n+1}(x)| = \left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x \mathrm{M}\frac{(t-a)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ce qui clôt la récurrence. On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f_n\|_\infty \leqslant \mathrm{M}\frac{(b-a)^n}{n!}$$

Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ converge normalement donc simplement et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n' = \sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[\,a\,;b\,]$. Ainsi, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;b\,]$ et par dérivation

$$\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + g(x)$$

Ainsi, la fonction g est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} f' - f = f_0(x) \\ f(a) = 0 \end{cases}$$

On conclut $$\boxed{\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad g(x) = \mathrm{e}^x\left(\int_a^x f_0(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)}$$

Exercice 6 (***)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$$

1. Justifier que S est bien définie et continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$$

Pour $x \geqslant 0$, la série $\sum u_n(x)$ est alternée avec $(|u_n(x)|)_n$ décroissante de limite nulle ce qui prouve que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Notons R_n son reste d'ordre n. D'après le théorème des séries alternées, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \ln\left(1 + \frac{x}{(n+1)(1+x)}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

D'où $$\|\mathrm{R}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par conséquent, la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction S est bien définie, continue sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{x}{n(1+x)}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

Ainsi, d'après le théorème de la double limite, licite puisqu'on a convergence uniforme, il vient

$$\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Notons $\qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

Soit $n \geqslant 1$. En séparant les indices pairs et impairs dans S_{2n}, on trouve

$$\mathrm{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)(2k-1)}{(2k)^2}\right)$$

En complétant, *à la Wallis*, pour faire apparaître des factorielles, on obtient

$$\mathrm{S}_{2n} = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)(2k-1)}{(2k)^2} \times \frac{(2k)^2}{(2k)^2}\right) = \ln\left(\frac{(2n+1)(2n)!^2}{(2^n n!)^4}\right)$$

Avec l'équivalent de Stirling $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, il vient

$$\frac{(2n+1)(2n)!^2}{(2^n n!)^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n+1) \times \frac{\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{4n} 4\pi n}{2^{4n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{4n} (2\pi n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}$$

Par suite $$\mathrm{S}_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

Or, la suite $(\mathrm{S}_n)_n$ converge donc la suite extraite $(\mathrm{S}_{2n})_n$ converge vers la même limite et on conclut

$$\boxed{\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)}$$

Exercice 7 (***)

On pose $\qquad \forall x > -1 \qquad \mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right]$

1. Montrer que S est définie, continue sur $\mathrm{I} = \,]-1\,;+\infty\,[$.
2. Étudier la monotonie de S.
3. Calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$.
4. Calculer $\mathrm{S}(n)$ pour n entier.
5. En déduire un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{I} \qquad u_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$

Soit $x > -1$. On a $$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui prouve que S est bien définie sur I. Soit $a \in]-1\,;0]$ et $b \geqslant 1$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_{\infty,[\,a\,;b\,]} \leqslant \frac{b}{n(n+a)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme tout segment de I est inclus dans un segment $[\,a\,;b\,]$ avec a et b choisis comme précédemment, il s'ensuit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ de fonctions continues converge normalement donc uniformément sur tout segment de I et par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction S est définie, continue sur I.}}$$

2. La fonction S est une somme (infinie) de fonctions croissantes d'où

$$\boxed{\text{La fonction S croît.}}$$

3. Par linéarité du symbole somme (car convergence), il vient pour $x \in \mathrm{I}$

$$\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right]$$

Par téléscopage, on conclut $\boxed{\forall x \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \dfrac{1}{x+1}}$

4. Soit n entier. On a

$$\mathrm{S}(n) = \mathrm{S}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} [\mathrm{S}(k+1) - \mathrm{S}(k)] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

D'où $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

5. Par comparaison série/intégrale, on a

$$\mathrm{S}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Enfin, par croissance de S, on a

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(\lfloor x \rfloor + 1) \geqslant \mathrm{S}(x) \geqslant \mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)$$

et $$\ln\left(\frac{\lfloor x \rfloor + 1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \ln\left(\frac{\lfloor x \rfloor}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

ce qui implique $$\ln(\lfloor x \rfloor + 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x) \quad \text{et} \quad \ln(\lfloor x \rfloor) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)}$$

Exercice 8 (***)

Étudier la convergence simple et normale de la série de fonctions $\sum f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{1+nx}$$

Déterminer un équivalent de la somme en 1.

Corrigé : Soit n entier. On a $f_n(x) = \mathrm{o}(x^n)$ pour $x \in [\,0\,;1\,[$ et $f_n(1) = \dfrac{1}{1+n}$. On en déduit la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[\,0\,;1\,[$. Les fonctions f_n sont dérivables et on trouve

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+(n-1)x)}{(1+nx)^2}$$

On en déduit la croissance des fonctions f_n et par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f_n\|_{\infty,[\,0\,;1\,[} = f_n(1) = \frac{1}{1+n}$$

Soit $a \in [\,0\,;1\,[$. Pour les mêmes raisons, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f_n\|_{\infty,[\,0\,;a\,]} = f_n(a)$$

Pour n entier, on trouve par troncature du reste

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{R}_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} f_{2n}(x) = nf_{2n}(x)$$

En supposant R_n borné sur $[\,0\,;1\,[$, pour n assez grand, il vient

$$\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[\,0\,;1\,[} \geqslant n\|f_{2n}\|_{\infty,[\,0\,;1\,[} = nf_{2n}(1) = \frac{n}{1+2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

ce qui nie la convergence uniforme de R_n vers zéro sur $[\,0\,;1\,[$. On conclut

> La série $\sum f_n$ diverge en 1, converge simplement sur $[\,0\,;1\,[$, pas normalement ni uniformément sur $[\,0\,;1\,[$ mais normalement sur $[\,0\,;a\,]$ pour $a \in [\,0\,;1\,[$.

Variante : Pour la convergence uniforme sur $[\,0\,;1\,[$, si elle avait lieu, comme on a la limite $f_n(x) \xrightarrow[x\to 1]{} f_n(1) = \dfrac{1}{1+n}$, on devrait avoir $\sum f_n(1)$ convergente d'après le théorème de double limite ce qui n'est pas.

Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{x^n}{1+n} \leqslant f_n(x) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{nx} = \frac{x^{n-1}}{n}$$

et après sommation par convergence des séries concernées

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+n} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\ln(1-x)}{x} \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant 1 - \frac{\ln(1-x)}{x}$$

On conclut

$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\ln(1-x)}$$

Exercice 9 (****)

On pose $\qquad \forall n \geqslant 2 \qquad \forall x \geqslant 0 \qquad f_n(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montre que $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
4. La fonction somme $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n$ est-elle dérivable à droite en 0^+ ?

Corrigé : 1. Soit $n \geqslant 2$ entier. On a $f_n(0) = 0$ puis $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ pour $x > 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} f_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+.}$$

2. Soit $n \geqslant 2$ entier. La fonction f_n est dérivable avec

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f_n'(x) = \frac{(1-nx)\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$$

Ainsi $\qquad \forall n \geqslant 2 \qquad \|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n\ln(n)}$

La série de Bertrand $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ est divergente. En effet, par comparaison série/intégrale, elle est de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$ et

$$\forall x \geqslant 2 \qquad \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_2^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Par conséquent $\qquad \boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} f_n \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}_+.}$

3. Soit $n \geqslant 2$ entier et $x \geqslant 0$. Par décroissance de $u \mapsto \dfrac{1}{\ln u}$, il vient

$$\mathrm{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-kx}}{\ln(k)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx}$$

Puis $\qquad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx} = \frac{x\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{e}^{-nx} = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{e}^{-nx}$

Par convexité, on a $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant x$ d'où

$$\forall x \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \mathrm{R}_n(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)}$$

et par conséquent $\qquad \|\mathrm{R}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

On conclut $\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} f_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+.}$

4. On note S la fonction somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} f_n$. Pour $n \geqslant 2$ entier et $x > 0$, on a

$$\frac{\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(0)}{x - 0} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{\ln(k)} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{\ln(k)}$$

Supposons S dérivable en 0. Faisant tendre $x \to 0^+$, on aurait alors

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{S}'(0) \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)}$$

Ceci est absurde puisque $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{\ln(k)}$ étant divergente à termes positifs.

On conclut $\boxed{\text{La fonction somme S n'est pas dérivable en 0.}}$