TD+ 03 - corrigé

Suites et séries de fonctions

Exercice 1.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ et $B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k$. On calcule pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in I$:

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)b_k(x)=a_0(x)b_0(x)+\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\big(B_k(x)-B_{k-1}(x)\big)\\&=a_0(x)\underbrace{b_0(x)}_{=B_0(x)}+\sum_{k=1}^{n}a_k(x)B_k(x)-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_k(x)B_{k-1}(x)}_{=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}(x)B_k(x)}\\&=a_n(x)B_n(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\big(a_k(x)-a_{k+1}(x)\big)B_k(x)\end{aligned}$$

Or, pour tout $x\in I$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$|a_n(x)B_n(x)|\leqslant M|a_n(x)|\quad\text{et}\quad|(a_k(x)-a_{k+1}(x))B_k(x)|\leqslant M|a_k(x)-a_{k+1}(x)|$$

Par hypothèses $a_n(x)\to 0$ donc $M|a_n(x)|\to 0$ et par encadrement $a_n(x)B_n(x)\to 0$, et $M|a_k(x)-a_{k+1}(x)|$ est le terme général d'une série convergente, donc par critère de majoration de séries à termes $\geqslant 0$, $\sum\big(a_k(x)-a_{k+1}(x)\big)B_k(x)$ converge absolument, donc converge.
Par opérations, $\big(S_n(x)\big)$ converge, donc $\sum u_n$ converge simplement. Notons S sa somme.
Montrons que la convergence est uniforme. Pour tout $x\in I$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la reprise des calculs précédents donne :

$$\begin{aligned}|S(x)-S_n(x)|&=\left|0+\sum_{k=0}^{+\infty}\big(a_k(x)-a_{k+1}(x)\big)B_k(x)-a_n(x)B_n(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\big(a_k(x)-a_{k+1}(x)\big)B_k(x)\right|\\&=\left|-a_n(x)B_n(x)+\sum_{k=n}^{+\infty}\big(a_k(x)-a_{k+1}(x)\big)B_k(x)\right|\\&\leqslant|a_n(x)B_n(x)|+\sum_{k=n}^{+\infty}|a_k(x)-a_{k+1}(x)|\underbrace{|B_k(x)|}_{\leqslant M}\leqslant M\|a_n\|_\infty+M\left\|\sum_{k=n}^{+\infty}|a_k-a_{k+1}|\right\|_\infty\end{aligned}$$

Le terme de droite est une majoration uniforme de $|S-S_n|$ qui tend vers 0 par hypothèses (convergence uniforme de (a_n) vers 0 et de $\sum|a_k-a_{k+1}|$).
On a donc établi $\boxed{\text{la convergence uniforme de }\sum u_n}$

2. **Énoncé :** Soit (a_n) une suite de fonctions (à valeurs positives ou nulles) qui tend uniformément vers 0 en décroissant. Alors $\sum(-1)^n a_n$ converge uniformément.
Remarque : l'hypothèse (u_n) tend vers 0 en décroissant suffit à justifier que (u_n) est à valeurs positives ou nulles (limite monotone).
   - Première preuve.

La suite (b_n) définie pour tout $x\in I$ et tout $n\in\mathbb{N}$ par $b_n(x)=(-1)^n$ vérifie :

$$\forall x\in I,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|\sum_{k=0}^{n}b_k(x)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right|=\begin{cases}1&\text{si } n \text{ est pair}\\0&\text{si } n\text{ est impair}\end{cases}\leqslant 1$$

et la suite (a_n) vérifie :

$$\forall x\in I,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}|a_k(x)-a_{k+1}(x)|\underset{a_k-a_{k+1}\geqslant 0}{=}\sum_{k=0}^{n}\big(a_k(x)-a_{k+1}(x)\big)\underset{\text{télescopage}}{=}a_0(x)-a_{n+1}(x)$$

donc comme par hypothèse $(a_n)\to 0$ uniformément, $\sum|a_k-a_{k+1}|$ converge uniformément.
Les hypothèses du critère d'Abel uniforme sont satisfaites,
$\boxed{\sum(-1)^n a_n\text{ converge uniformément}}$

   - Deuxième preuve. Soit $x\in I$. Alors la série $\sum(-1)^n a_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées, en particulier la série $\sum(-1)^n a_n$ converge simplement et on dispose de la majoration du reste :

$$\forall x\in I,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |R_n(x)|=\left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k a_k(x)\right|\leqslant|a_n(x)|\leqslant\|a_n\|_\infty$$

Par hypothèse $\|a_n\|_\infty\to 0$ donc le reste converge uniformément vers 0, donc
$\boxed{\sum(-1)^n a_n\text{ converge uniformément}}$

3. On considère $a_n : x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{1}{n}$ et $b_n : x\in I\mapsto e^{inx}$.
On observe que $\sum|a_n-a_{n+1}|=\sum\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ converge uniformément (série télescopique, indépendante de $x\in\mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}$ et (a_n) converge vers 0 uniformément (indépendante de x).
Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\not\equiv 0\,[2\pi]$ on calcule :

$$\left|\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right|=\left|\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right|=\left|e^{inx/2}\right|\frac{\left|\sin\frac{n+1}{2}x\right|}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\sin(x/2)}$$

Ainsi pour tout $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a\leqslant b$ et $[a,b]\subset]0,2\pi[$ on dispose de la majoration uniforme :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right|\leqslant\frac{1}{\sin(a/2)}+\frac{1}{\sin(b/2)}$$

La règle d'Abel assure alors la $\boxed{\text{convergence uniforme de la série sur tout segment de }]0,2\pi[}$ (et sur tous les segments équivalents modulo 2π).
En revanche :
$\boxed{\text{il n'y a pas convergence uniforme sur un intervalle ayant un multiple de }2\pi\text{ dans son adhérence}}$,
sinon par théorème de la double limite la série $\sum\frac{1}{n}$ converge, ce qui est absurde.

Remarque. La transformation d'Abel est l'analogue discret d'une intégration par parties, elle est souvent utile pour établir la convergence uniforme d'une série de fonctions lorsqu'il n'y a pas convergence normale (parfois la version «séries alternées» suffit).

Exercice 2.

1. On suppose par l'absurde que la convergence n'est pas uniforme :

$$\begin{aligned}&\text{non}\big(\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N\Longrightarrow \forall x\in I,\ \left|f_n(x)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon\big)\\ \Longleftrightarrow\ &\exists\varepsilon>0,\ \forall N\in\mathbb{N},\ \exists n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N \text{ et } \exists x\in I,\ \left|f_n(x)-f(x)\right|>\varepsilon \qquad (\star)\end{aligned}$$

- On construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers naturels $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite d'éléments de I, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\left|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)\right|>\varepsilon$.
  — Pour $N=0$ dans $(\star)$, on dispose de $n_0\in\mathbb{N}$ et de $x_0\in I$ tels que $\left|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)\right|>\varepsilon$.
  — Soit $k\in\mathbb{N}$. On suppose avoir construit $n_0<\cdots<n_k\in\mathbb{N}$ et $x_0,\ldots,x_k\in I$ tels que pour tout $i\in[\![0,k]\!]$, $\left|f_{n_i}(x_i)-f(x_i)\right|>\varepsilon$.
  Pour $N=n_k+1$ dans $(\star)$, on dispose de $n_{k+1}\in\mathbb{N}$, $n_{k+1}>n_k$ et de $x_{k+1}\in I$, tels que $\left|f_{n_{k+1}}(x_{k+1})-f(x_{k+1})\right|>\varepsilon$.
  On a ainsi construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers naturels $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite d'éléments de I, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\left|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)\right|>\varepsilon$.
- Quitte à ré-extraire (Bolzano-Weirstrass) on peut supposer que la suite (x_k) (bornée) converge vers un élément $x\in I$ (car $I=[a,b]$ est fermé).
  Mais il n'est pas possible à ce stade de déterminer la limite de $f_{n_k}(x_k)$ sans un travail supplémentaire.
- Pour tout $x\in I$, la suite $\big(f_n(x)\big)$ est croissante et convergente (par hypothèse) donc converge vers sa borne supérieure, si bien que pour tout $x\in I$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)\leqslant f(x)$.
  Soit alors $m\in\mathbb{N}$. On dispose de l'inégalité :
  $$\forall k\in\mathbb{N},\ k\geqslant m,\ f(x_k)-f_m(x_k)\underset{n_k\geqslant k\geqslant m}{\geqslant} f(x_k)-f_{n_k}(x_k)=\left|f(x_k)-f_{n_k}(x_k)\right|>\varepsilon$$
  puis par continuité de f_m et de f il vient par passage à la limite ($k\to+\infty$) : $f(x)-f_m(x)\geqslant\varepsilon$.
  Ceci étant valable pour tout $m\in\mathbb{N}$, par passage à la limite ($m\to+\infty$) on a : $0\geqslant\varepsilon>0$, ce qui est absurde.

Finalement $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers } f}$

2. • Comme f est continue sur le segment $I=[a,b]$, elle y est uniformément continue (Heine).
  Soit $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que pour tous $x,x'\in I$, $\left|x-x'\right|\leqslant\eta\Longrightarrow\left|f(x)-f(x')\right|\leqslant\varepsilon$.
  Soit alors $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{p}\leqslant\eta$, on considère la subdivision régulière $x_0=a<\cdots<x_p=b$ de pas $\dfrac{b-a}{p}$ de I. En particulier pour tout $i\in[\![0,p-1]\!]$, $\left|f(x_i)-f(x_{i+1})\right|\leqslant\varepsilon$.
- Soit $x\in I$, il existe $i\in[\![0,p-1]\!]$ tel que $x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$. Par croissance des f_n, il vient, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $f_n(x_i)\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(x_{i+1})$ (donc $-f_n(x_{i+1})\leqslant -f_n(x)\leqslant -f_n(x_i)$).
  Par ailleurs, par convergence simple de (f_n), par passage à la limite ($n\to+\infty$) il vient : $f(x_i)\leqslant f(x)\leqslant f(x_{i+1})$.
  Finalement on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ f(x_i)-f_n(x_{i+1})\leqslant f(x)-f_n(x)\leqslant f(x_{i+1})-f_n(x_i)$.
- Par convergence simple de (f_n), pour tout $i\in[\![0,p]\!]$, il existe $N_i\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_i$, $\left|f_n(x_i)-f(x_i)\right|\leqslant\varepsilon$.
  En considérant $N=\max\{N_0,\ldots,N_p\}$, pour tout $n\geqslant N$, pour tout $i\in[\![0,p]\!]$, $\left|f_n(x_i)-f(x_i)\right|\leqslant\varepsilon$.
- Ainsi, pour tout $n\geqslant N$, pour tout $i\in[\![0,p-1]\!]$,
  $$\left|f(x_i)-f_n(x_{i+1})\right|=\left|f(x_i)-f(x_{i+1})+f(x_{i+1})-f_n(x_{i+1})\right|\leqslant\underbrace{\left|f(x_i)-f(x_{i+1})\right|}_{\leqslant\varepsilon}+\underbrace{\left|f(x_{i+1})-f_n(x_{i+1})\right|}_{\leqslant\varepsilon}\leqslant 2\varepsilon$$
  et de même : $\left|f(x_{i+1})-f_n(x_i)\right|\leqslant 2\varepsilon$.
- Ainsi : $\forall n\geqslant N,\ \forall x\in I,\ -2\varepsilon\leqslant f(x)-f_n(x)\leqslant 2\varepsilon$.
  On a donc démontré : $\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ \forall x\in I,\ \left|f(x)-f_n(x)\right|\leqslant 2\varepsilon$.
  Autrement dit $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers } f}$

Exercice 3.

1. Énoncé : soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R\in\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\sum a_n$ converge. Alors $f(x)\underset{x\to R^-}{\longrightarrow}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nR^n$.
   Contre-exemple : soit $\sum(-1)^nx^n$, c'est une série entière de rayon de convergence 1 et de somme $f: x\mapsto\frac{1}{1+x}$ où $f(x)\underset{x\to1^-}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2}$. Pourtant $\sum(-1)^n$ diverge.
2. (a) (ka_k) est une suite convergente, donc elle est bornée. Ainsi $\{|ka_k|\mid k\geqslant n\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{elle admet une borne supérieure que l'on note } M_n}$ En particulier $M_n\geqslant 0$.
   Par ailleurs $ka_k\to0$ donc, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k\geqslant N$, $|ka_k|\leqslant\varepsilon$ donc en particulier, pour tout $n\geqslant N$, pour tout $k\geqslant n$, $|ka_k|\leqslant\varepsilon$, donc $0\leqslant M_n\leqslant\varepsilon$.
   $\boxed{\text{On a montré que } M_n\to0}$

   (b) On calcule pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in]-1,1[$:
   $$\begin{aligned}\left|f(x)-\sum_{k=0}^n a_k\right|&=\left|\sum_{k=0}^n a_k(x^k-1)+\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_kx^k\right|=\left|0+\sum_{k=1}^n\underbrace{a_k}_{=\frac{ka_k}{k}}(x^k-1)+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\underbrace{a_k}_{=\frac{ka_k}{k}}x^k\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^n|ka_k|\frac{1}{k}\underbrace{|x-1|}_{=1-x}\underbrace{\sum_{\ell=0}^{k-1}x^\ell}_{\in[0,k]}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{k}}_{\leqslant\frac{1}{n}}|ka_k|\,x^k\leqslant(1-x)\sum_{k=1}^n|ka_k|+\frac{1}{n}M_{n+1}\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty}x^k}_{=\frac{x^{n+1}}{1-x}\leqslant\frac{1}{1-x}}\\&\leqslant n(1-x)\frac{\sum_{k=1}^n|ka_k|}{n}+\frac{1}{n(1-x)}M_{n+1}\end{aligned}$$

   (c) En particulier pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
   $$\left|f(1-1/n)-\sum_{k=0}^n a_k\right|\leqslant n\big((1-(1-1/n)\big)\frac{\sum_{k=1}^n|ka_k|}{n}+\frac{1}{n\big(1-(1-1/n)\big)}M_{n+1}=\frac{\sum_{k=1}^n|ka_k|}{n}+M_{n+1}$$
   Or $\dfrac{\sum_{k=1}^n|ka_k|}{n}\to0$ (Césaro sous l'hypothèse $ka_k\to0$) et $M_{n+1}\to0$.
   Ainsi $f(1-1/n)-\displaystyle\sum_{k=0}^n a_k\to0$ et comme par hypothèse $f(1-1/n)\to S$ (composition de limites), on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^n a_k\to S$.

   $\boxed{\text{On a donc démontré la convergence de } \sum a_n \text{ et établi : } \sum_{n=0}^{+\infty}a_n=S}$
