ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 06/01/2025

Devoir en temps libre n°10

Problème I

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec n entier non nul muni de $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ pour $(P, Q) \in E^2$. On note $(\pi_0, \dots, \pi_n)$ la base orthonormée fournie par l'algorithme de Gram-Schmidt sur $(1, X \dots, X^n)$.

1. Justifier que $\deg \pi_k = k$ pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$.
   Désormais, on fixe $j \in [\![1 ; n]\!]$.
2. En considérant $\langle 1, \pi_j\rangle$, montrer que π_j a au moins une racine d'ordre impair dans $]-1 ; 1[$.

   On note $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les racines d'ordre impair de π_j dans $]-1 ; 1[$ et $S = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} (X - \alpha_i)$.
3. En considérant $\langle S, \pi_j\rangle$, montrer que π_j admet exactement j racines distinctes dans $]-1 ; 1[$.

Problème II

Soit E préhilbertien réel.

1. Soit p projecteur orthogonal. Établir
$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$$
2. Soit p un projecteur de E. Montrer
$$p \text{ orthogonal} \iff \forall x \in E \qquad \langle p(x), x\rangle \geqslant 0$$
3. Soient p et q des projecteurs orthogonaux. Montrer que les valeurs propres de $p \circ q$ sont dans $[0 ; 1]$.

Problème III

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle U, V\rangle = \mathrm{Tr}\,(U^\top V)$ pour $(U, V) \in E^2$. On pose
$$\forall (A, M) \in E^2 \qquad T_A(M) = AM - MA$$

1. Vérifier que l'application $(U, V) \mapsto \langle U, V\rangle$ est bien un produit scalaire sur E.
2. Soit $A \in E$ avec A *nilpotente*. Établir
$$\mathrm{Ker}\ T_A \subset \mathrm{Vect}\,(A^\top)^\perp$$
3. Soit $A \in E$. Montrer $\qquad (\mathrm{Im}\ T_A)^\perp = \mathrm{Ker}\ T_{A^\top}$
4. Soit $A \in E$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $A \in \mathrm{Im}\ T_A$.