Corrigé du TD OEM II

Exercice 1 :** PROPAGATION D'ONDES LONGITUDINALES DANS UN PLASMA

Dans un plasma dilué, on étudie la possibilité de propagation du champ électromagnétique suivant :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_x}.$$

1) Caractériser cette onde. Que vaut le champ magnétique ?
2) Ce plasma est-il localement neutre ? Exprimer la densité volumique de charges.
3) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un électron. En déduire une relation entre la dérivée de la densité volumique de courant $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ et $\vec{E}$.
4) A l'aide des équations de Maxwell, trouver une autre relation entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$.
5) En déduire l'équation vérifiée par $\vec{E}$. Quelle est la relation de dispersion ? Calculer la vitesse de groupe.
6) Calculer le vecteur de Poynting. Conclure sur la propagation de l'énergie.

Réponses ex 1 : 1) $\vec{B} = \vec{0}$ 2) $\rho = k\varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - kx)$ 3) $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}$ 4) $\vec{j} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

5) $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\vec{E}$ $\omega^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$ $v_g = 0$ 6) $\vec{R} = \vec{0}$

Corrigé détaillé :

① OEM PPM suivant $+\vec{u_x}$, longitudinale

$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \frac{k\vec{u_x}\wedge E\vec{u_x}}{\omega} = \vec{0}}$

② $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = kE_0 \sin(\omega t - kx) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\rho = k\varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - kx)}$

③ Pfd appliqué à un électron : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$

Or $\vec{j} = -ne\vec{v}$

$\rightarrow -\frac{m}{ne}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -e\vec{E}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}}$

④ $\underbrace{\vec{rot}(\vec{B})}_{\vec{0}} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \boxed{\vec{j} = -\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

⑤ $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}\\ \vec{j} = -\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\vec{E}}$

On cherche des solutions sous la forme $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\vec{u_x}$ $\Rightarrow -\omega^2\underline{\vec{E}} = -\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\underline{\vec{E}}$

D'où la relation de dispersion $\boxed{\omega^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} = \omega_p^2}$ ou $\omega = \omega_p$

Relation de dispersion inhabituelle : $\left\{\begin{array}{l}k \text{ ne dépend pas de } \omega\,!\\ \lambda\end{array}\right.$

$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 0$

⑥ $\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \vec{0}$ L'énergie ne se propage pas (conforme à $v_g = 0$)

Exercice 8 :** RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE DEMI-ONDE

Une antenne filiforme, colinéaire à l'axe Oz, de longueur $l=\lambda/2$, centrée à l'origine, est le siège d'un courant sinusoïdal d'intensité $\underline{I}(z,t)=I_0\cos(2\pi z/\lambda)\exp(i\omega t)$ avec $\omega=2\pi c/\lambda$.
Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques d'origine O, d'axe Oz.
On se place dans la zone de rayonnement $r \gg \lambda$.
On admet que le champ magnétique total rayonné en M par l'antenne est :

$$\underline{\vec{B}}(M,t) = i\,\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\,\exp\left(i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\overrightarrow{u_\varphi}$$

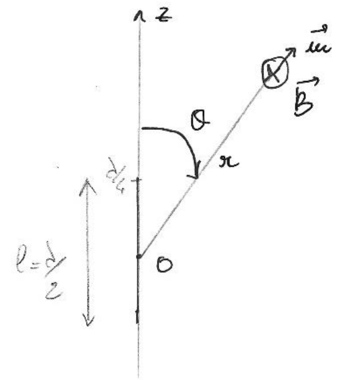
et que localement ce champ électromagnétique a la structure d'une onde plane progressive.

1) Calculer la moyenne dans le temps du vecteur de Poynting en M.
2) Calculer la puissance moyenne P rayonnée par l'antenne à travers une sphère de rayon r.
   On donne $\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}d\theta = 1{,}22$.
   En déduire la résistance de rayonnement R de l'antenne définie par $P=RI_{eff}^2$. Calculer numériquement R. Quelle serait la valeur de l'intensité maximale I_0 pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est P=2100kW (puissance de l'ancien émetteur Grandes Ondes de France Inter à Allouis, éteint depuis janvier 2017)

Réponses ex 8 : 1) $\langle\vec{R}\rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin(\theta)}\right)^2\vec{u}_r$ *est maximale en* $\theta = \pi/2$

2) $P = 1{,}22\,\frac{\mu_0 I_0^2 c}{4\pi}$ $\quad R = 1{,}22\,\frac{\mu_0 c}{2\pi} = 73{,}2\ \Omega$ $\quad$ *Pour P=2100kW,* $I_0 = 240$ *A*

Corrigé détaillé :



① Relation de structure d'une OPPH $\quad \vec{B} = \frac{\vec{u_r}\wedge\vec{E}}{c}$

$\rightarrow \vec{u_r}\wedge\vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{E} \rightarrow \vec{E} = -c\,\vec{u_r}\wedge\vec{B}$

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = i\,\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi r}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\exp\left(i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\vec{u_\theta}$$

$$\langle\vec{R}\rangle_t = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*\right)$$

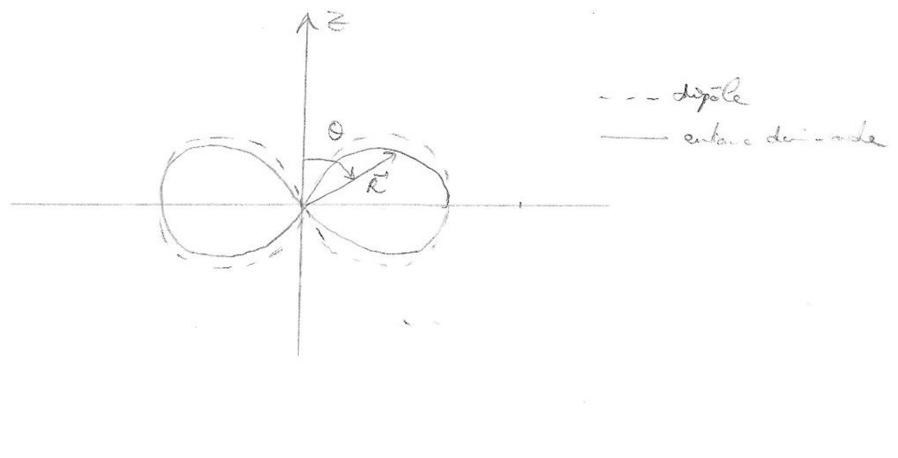
$$= \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left[\left(i\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi r}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\vec{u_\theta}\right)\wedge\left(-i\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\,\frac{\cos(\ )}{\sin\theta}\vec{u_\varphi}\right)\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2}\,\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2(\theta)}\vec{u_r}$$

$$\langle\vec{R}(\theta\ll 1)\rangle_t \simeq \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2}\,\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right)}{\sin^2\theta}\vec{u_r} = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2}\,\frac{\left(\theta^2/2\right)^2}{\theta^2}\vec{u_r} \xrightarrow[\theta\to 0]{} \vec{0}$$

$\langle\vec{R}\rangle_t$ est max en $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \pi/2$

Indicatrice



② $P = \iint_{\text{sphère}} \langle \vec{R} \rangle . \vec{u}\, \underbrace{dS}_{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi} = \dfrac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2} \displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$$\left.\begin{array}{l} P = 1{,}22\, \dfrac{\mu_0 I_0^2 c}{4\pi} \\ \\ \text{Or } I_{eff} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \quad P = R\, I_{eff}^2 \text{ avec } R = 1{,}22\, \dfrac{\mu_0 c}{2\pi} = 73{,}2\,\Omega$$

Pour $P = 2100\,kW$ avec $P = \frac{R}{2} I_0^2 \rightarrow I_0 = \sqrt{\frac{2P}{R}} = 240\,A$