Rappels de Cinématique

TD

v1.1 Ⓟ

Institution Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony

Table des matières

1 Exercice 1 - Application directe : un vélo !

Un moyen très simple de s'exercer à la cinématique est de considérer un cycliste sur son bébé (son vélo).

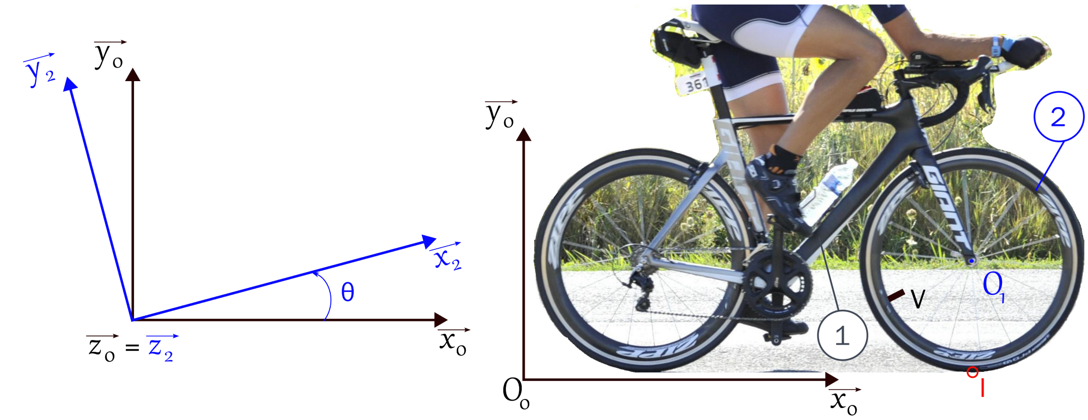


FIGURE 1 – Bien posé sur sa machine.

Nous donnons les infos suivantes :

- Le repère $R_0 = (O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est lié au sol.
- Le repère $R_1 = (O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ est lié à la roue avec O_1 confondu avec l'axe de rotation de la roue par rapport au cadre. On suppose que la roue reste dans le plan vertical donc :

$$\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$$

- On note $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$ l'angle orienté de $\overrightarrow{x_0}$ vers $\overrightarrow{x_1}$.
- Cet angle est proportionnel à la vitesse angulaire de la roue $\theta = \omega \cdot t$.
- Le vélo se déplace à la vitesse $v(t)$ suivant $\overrightarrow{x_0}$, la roue ne patine pas, *elle roule sans glisser*, on a donc $v = -R \cdot \omega$ (**hypothèse "plop"**). Pour la suite nous supposerons que la vitesse est constante : $v(t) = v$.
- Le point V associé à la valve est défini par :

$$\overrightarrow{O_1V} = R_v \cdot \overrightarrow{x_1}$$

Question 1 Donner la trajectoire du point V dans le mouvement de 2 par rapport à 0

Question 2 Déterminer la vitesse et l'accélération du point V.

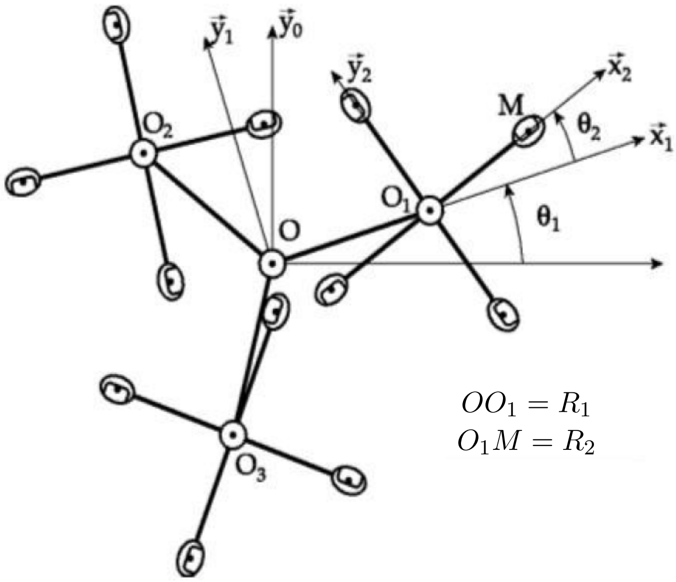
Question 3 En considérant I, le point de contact entre la roue et le sol. Démontrer que l'hypothèse *plop* permet d'affirmer cette relation entre v, R et ω.

2 Exercice 2 - Manège pieuvre

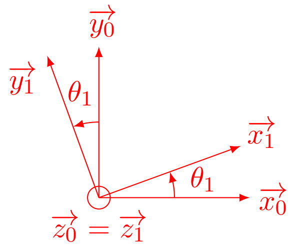
Présentation

Le manège pieuvre est un classique des foires. Il procure des sensations par son mouvement épicycloïdal qui produit de fortes accélérations. Nous allons étudier la vitesse d'un des sièges de ce manège, auquel on associe le point M. Soit O le centre de rotation principal, $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$ le repère lié au bras principal **1**, en rotation d'angle θ_1 par rapport à un repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 = \vec{z}_1)$ fixe par rapport au sol **0**. Soit $\mathcal{R}_2 = (O_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 = \vec{z}_1)$ un repère accroché au bras secondaire **2** en rotation d'angle θ_2 par rapport au bras **1**.

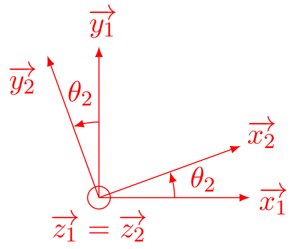
On ne tient pas compte de la possibilité de rotation autour de $\vec{y}_1$ pour les bras.



Question 1 Donner les figures de changement de bases relatives aux angles θ_1 et θ_2. Écrire les vecteurs taux de rotation correspondants.



$\vec{\Omega}_{S_1/S_0} = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0$



$\vec{\Omega}_{S_2/S_1} = \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_1$

Question 2 Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ le plus simplement possible.

Relation de Chasles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$

D'où, en reprenant les données du sujet : $\overrightarrow{OM} = R_1 \cdot \vec{x}_1 + R_2 \cdot \vec{x}_2$

Traitement du problème par la cinématique du point

Question 3 Après avoir exprimé le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ dans la base b_0, dériver ce vecteur pour obtenir $\vec{V}_{M/0}$. Mettre cette vitesse sous la forme :

$$\vec{V}_{M/0} = a(t) \cdot \vec{x}_0 + b(t) \cdot \vec{y}_0$$

Traitement du problème par la cinématique du solide

Question 4 Dériver le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ à partir de son écriture la plus simple pour obtenir $\vec{V}_{M/0}$. Mettre cette vitesse sous la forme :

$$\vec{V}_{M/0} = R_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1 + R_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{y}_2$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}R_0 = \frac{d(R_1 \cdot \vec{x}_1 + R_2 \cdot \vec{x}_2)}{dt}R_0 = R_1 \cdot \frac{d\vec{x}_1}{dt}R_0 + R_2 \cdot \frac{d\vec{x}_2}{dt}R_0 \quad (1)$$

Il suffit maintenant d'utiliser la formule de dérivation vectorielle :

$\frac{d\vec{x}_1}{dt}R_0 = \left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{x}_1$ avec $\vec{x}_1$ fixe dans le repère R_1, donc $\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{R_1} = \vec{0}$

D'où : $\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{R_0} = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{y}_1$

On procède de la même manière pour dériver $\vec{x}_2$. Cependant, ici, on devra utiliser la composition des vecteurs rotations pour trouver : $\vec{\Omega}_{R_2/R_0} = \vec{\Omega}_{R_2/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0}$. On a alors :

$\left.\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right|_{R_0} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \vec{z}_2 \wedge \vec{x}_2 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \vec{y}_2$

On reprend l'équation (1) : $\vec{V}_{M\in 2/0} = R_1\dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1 + R_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \vec{y}_2$

Question 5 Quelle méthode vous semble la plus facile ?

La méthode de la cinématique du solide ! ! !

En observant le manège tourner en régime permanent, on constate que $\omega_1 = \dot{\theta}_1 = cste$ et $\omega_2 = \dot{\theta}_2 = -2\,\omega_1$.

Question 6 Calculer dans ces conditions $\|\overrightarrow{V}_{M/0}\|$ et indiquer pour quelle valeur de θ_2 cette norme est maximale. Effectuer l'application numérique pour $R_1 = 8\,\text{m}$, $R_2 = 1\,\text{m}$ et $\omega_1 = 6\,\text{tr/min}$.

Méthode 1

On projette $\overrightarrow{V}_{M/0}$ dans $\mathcal{R}_1$ pour ensuite calculer sa norme : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}]$

$\overrightarrow{y}_2 = -\sin\theta_2\,\overrightarrow{x}_1 + \cos\theta_2\,\overrightarrow{y}_1$ soit : $\overrightarrow{V}_{M0} = -R_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\sin\theta_2\,\overrightarrow{x}_1 + R_1\dot{\theta}_1 + R_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\cos\theta_2\,\overrightarrow{y}_1$

D'après les hypothèses : $\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 = -\omega_1 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{V}_{M/0} = R_2\omega_1\sin\theta_2\,\overrightarrow{x}_1 + (R_1 - R_2\cos\theta_2)\omega_1\,\overrightarrow{y}_1$

Soit : $\|\overrightarrow{V}_{M/0}\| = \sqrt{(R_2\omega_1\sin\theta_2)^2 + ((R_1-R_2\cos\theta_2)\omega_1)^2}$

Et enfin : $\|\overrightarrow{V}_{M/0}\| = \omega_1\sqrt{R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\theta_2}$

Méthode 2

On utilise la propriété suivante : $\|\overrightarrow{V}_{M/0}\| = \sqrt{\overrightarrow{V}_{M/0}\cdot\overrightarrow{V}_{M/0}}$

$\|\overrightarrow{V}_{M/0}\| = (R_1\omega_1\,\overrightarrow{y}_1 - R_2\omega_1\,\overrightarrow{y}_2)\cdot(R_1\omega_1\,\overrightarrow{y}_1 - R_2\omega_1\,\overrightarrow{y}_2)$

Avec : $\overrightarrow{y}_1\cdot\overrightarrow{y}_2 = \cos\theta_2$ on retrouve immédiatement : $\|\overrightarrow{V}_{M/0}\| = \omega_1\sqrt{R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\theta_2}$

Cette valeur est maximale quand $\cos\theta_2 = -1$ soit : $\theta_2 = \pi$

AN : $V_{max} = 6\times\dfrac{2\pi}{60}\times\sqrt{8^2+1^2+2\times 8\times 1} = 5{,}65\,\text{m.s}^{-1} = 20{,}34\,\text{km/h}$

Question 7 Calculer l'accélération $\overrightarrow{\Gamma}_{M/0}$ dans le cas où $\omega_1 = \dot{\theta}_1 = cste$ et $\omega_2 = \dot{\theta}_2 = -2\,\omega_1$ et en déduire la valeur de la norme de l'accélération. Quelle est la norme de l'accélération maximale subie par un passager ?

$\overrightarrow{\Gamma}_{M/0} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{V}_{M/0}}{dt}\right|_{R_0}$ avec : $\overrightarrow{V}_{M/0} = (R_1\,\overrightarrow{y}_1 - R_2\,\overrightarrow{y}_2)\omega_1$ et : $\omega_1 = cste$

Soit : $\overrightarrow{\Gamma}_{M/0} = R_1\omega_1\dfrac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}|_{R_0} - R_2\omega_1\left.\dfrac{d\overrightarrow{y}_2}{dt}\right|_{R_0}$

Comme à la question 4, on utilise la formule de dérivation vectorielle. Conformément aux hypothèses, on utilise : $\overrightarrow{\Omega}_{R1/R0} = \omega_1\,\overrightarrow{z}_0$ et $\overrightarrow{\Omega}_{R2/R0} = -\omega_1\,\overrightarrow{z}_0$.

On trouve alors : $\left.\dfrac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}\right|_{R_0} = -\omega_1\,\overrightarrow{x}_1$ et : $\left.\dfrac{d\overrightarrow{y}_2}{dt}\right|_{R_0} = \omega_1\,\overrightarrow{x}_2$

Soit enfin : $\overrightarrow{\Gamma}_{M/0} = -\omega_1^2(R_1\,\overrightarrow{x}_1 + R_2\,\overrightarrow{x}_2)$

Par la même méthode que précédemment, on trouve : $\|\overrightarrow{\Gamma}_{M/0}\| = \omega_1^2\sqrt{R_1^2+R_2^2+2R_1R_2\cos\theta_2}$

Ici, l'accélération est maximale pour $\theta_2 = 0$. On a alors :

$\Gamma_{max} = (6\times\dfrac{2\pi}{60})^2\times\sqrt{8^2+1^2+2\times 8\times 1} = 3{,}55\,\text{m.s}^{-2}$

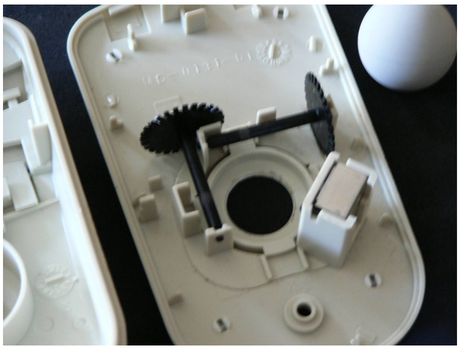
Question 8 Écrire les torseurs cinématiques $\{\mathcal{V}_{1/0}\}$ et $\{\mathcal{V}_{2/0}\}$.

Il suffit de reprendre la définition du torseur cinématique et les résultats trouvés aux questions précédentes ...

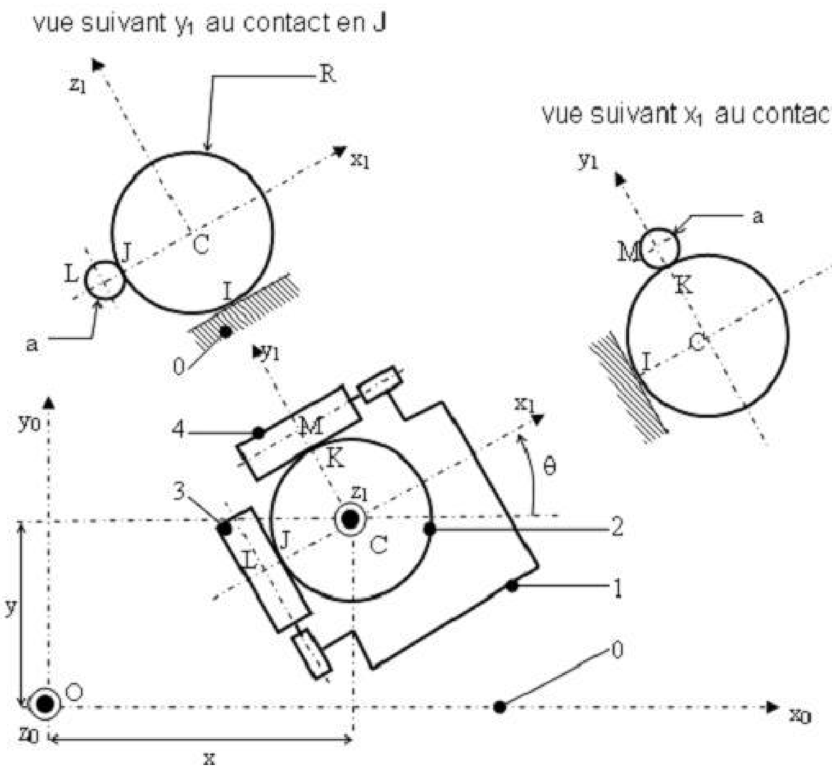
$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = {}_{O_1}\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}_{O_1 \in 1/0} \end{array} \right\} = {}_{O_1}\left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ R_1 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 \end{array} \right\}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = {}_{M}\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/0} \\ \vec{V}_{M \in 2/0} \end{array} \right\} = {}_{M}\left\{ \begin{array}{c} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z}_1 \\ R_1 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + R_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_2 \end{array} \right\}$$

3 Exercice 3 - Vieille souris d'ordinateur



On se propose d'étudier le fonctionnement d'une souris mécanique associée à un micro-ordinateur et de comprendre les inconvénients liés à ce type de souris. Quand vous manipulez une souris mécanique en la faisant glisser sur une surface plane, une boule de caoutchouc – ou d'acier recouvert de caoutchouc – située sous la souris, tourne en suivant le même mouvement. Cette boule entraîne par friction deux rouleaux qui la touchent en deux points. Un des rouleaux obéit aux déplacements verticaux sur l'écran. Le second, perpendiculaire au premier, gère les mouvements horizontaux. Chaque rouleau communique ses rotations à un petit disque, appelé encodeur (du type codeur incrémental). L'encodeur est constitué d'un disque dont sa périphérie est constituée d'alternance de dents (présence de matière et absence de matière), d'un émetteur de lumière (photodiode émettrice) et d'un récepteur de lumière (phototransistor récepteur). Le comptage des dents permet de mesurer le déplacement.



Le plan de travail est indicé (**0**), il lui est associé le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Le cadre lié à la souris porte le numéro (**1**), il lui est associé le repère $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

En fonctionnement normal, la bille **2** de rayon R roule sans glisser en I, sur le plan lié à $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

L'encodeur **3**, de rayon a, est en rotation d'axe $(L, \vec{y}_1)$ avec le cadre **1**.

L'encodeur **4**, de rayon a, est en rotation d'axe $(M, \vec{x}_1)$ avec le cadre **1**.

En fonctionnement normal, les encodeurs **3** et **4** roulent sans glisser, respectivement en J et K sur la bille **2**.

On note $\vec{\Omega}_{3/1} = \omega_{31}\vec{y}_1$ le vecteur taux de rotation de 3/1, et $\vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{41}\vec{x}_1$ le vecteur taux de rotation de 4/1.

On suppose que le cadre **1** est en liaison appui-plan par rapport à (**0**). On note $\overrightarrow{IC} = R\vec{z}_1 = R\vec{z}_0$ (la souris ne décolle pas du plan !!!). La position de 1/0 est définie par : $\overrightarrow{OC} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + R\vec{z}_0$; $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$; $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$.

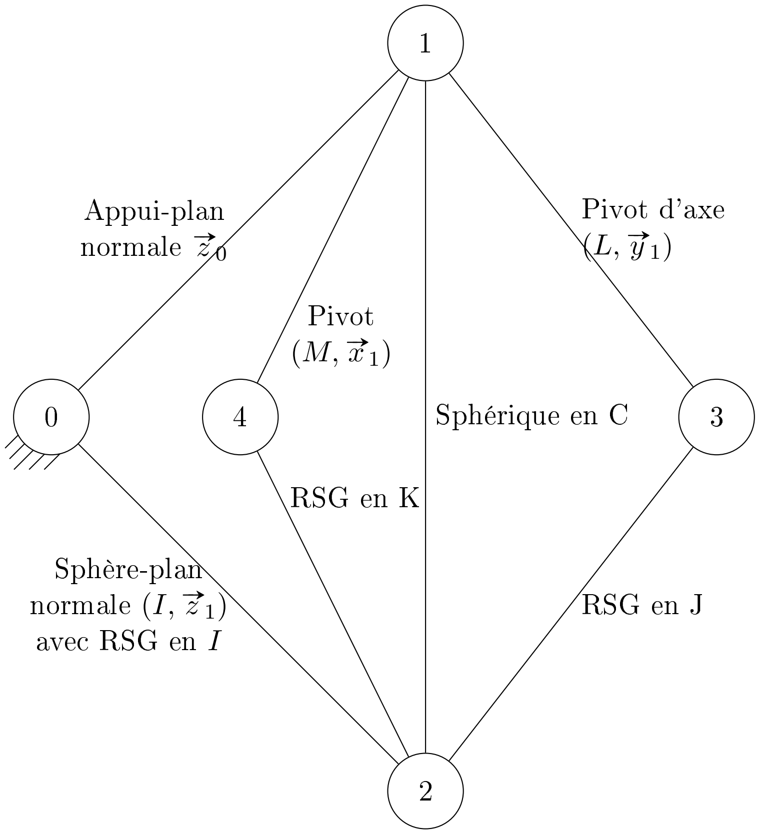
Le mouvement du cadre **1** par rapport au plan **0** est ainsi défini par le torseur cinématique : $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 \end{array} \right\}}$

La bille **2** est en liaison rotule avec le cadre **1** de centre C. On note le torseur cinématique associé à cette liaison : $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/1} = p\vec{x}_0 + q\vec{y}_0 + r\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$ où p, q, r sont des inconnues.

Objectif

L'objectif de ce problème est de relier la position de la souris x et y dans le plan aux rotations des encodeurs θ_{31} et θ_{41}. Ces relations seront utilisées pour programmer le driver permettant à la souris de fonctionner sur le PC.

Question 1 Tracer le graphe de liaisons de ce mécanisme. Donner la forme des torseurs cinématiques de chacune des liaisons en choisissant pour chaque torseur un point d'écriture et une base simples.



Les torseurs cinématiques s'écrivent simplement :

Pour les torseurs cinématiques donnés dans le sujet du TD, c'est facile, il n'y a que recopier !

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}\,\vec{z}_0 \\ \vec{V}_{C,1/0} = \dot{x}.\vec{x}_0 + \dot{y}.\vec{y}_0 \end{array} \right\}} \quad ; \quad \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} p\,\vec{x}_0 + q\,\vec{y}_0 + r\,\vec{z}_0 \\ \vec{V}_{C,2/1} = \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Les 2 torseurs ci-dessous s'obtiennent simplement en analysant la liaison entre les solides (en l'occurrence des liaisons pivots) :

$$\{\mathcal{V}_{4/1}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{c} \omega_{41}.\vec{x}_1 \\ \vec{V}_{M,4/1} = \vec{0} \end{array} \right\}} \quad ; \quad \{\mathcal{V}_{3/1}\} = \underset{L}{\left\{ \begin{array}{c} \omega_{31}.\vec{y}_1 \\ \vec{V}_{L,3/1} = \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Les 3 torseurs ci-dessous s'obtiennent simplement en analysant la liaison entre les solides (contacts ponctuels), et en tenant compte des RSG entre les solides :

$$\{\mathcal{V}_{4/2}\} = \underset{K}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{4/2} \\ \vec{V}_{K,3/2} = \vec{0}\ \text{(RSG)} \end{array} \right\}} ; \{\mathcal{V}_{2/0}\} = \underset{I}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/0} \\ \vec{V}_{I,2/0} = \vec{0}\ \text{(RSG)} \end{array} \right\}} ; \{\mathcal{V}_{3/2}\} = \underset{J}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{3/2} \\ \vec{V}_{J,3/2} = \vec{0}\ \text{(RSG)} \end{array} \right\}}$$

Question 2 Donner l'expression du torseur cinématique du mouvement $2/0$ en C en fonction des inconnues du mouvement $1/0$ et $2/1$.

On écrit la composition des torseurs cinématiques en C :

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\}_C = \{\mathcal{V}_{2/1}\}_C + \{\mathcal{V}_{1/0}\}_C$$

Les 2 torseurs sont connus en C donc tout va bien !

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\}_C = {}_C\left\{\begin{array}{c} p\vec{x}_0 + q\vec{y}_0 + r\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array}\right\} + {}_C\left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \dot{x}.\vec{x}_0 + \dot{y}.\vec{y}_0 \end{array}\right\}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\}_C = {}_C\left\{\begin{array}{c} p\vec{x}_0 + q\vec{y}_0 + (r+\dot{\theta})\vec{z}_0 \\ \dot{x}.\vec{x}_0 + \dot{y}.\vec{y}_0 \end{array}\right\}$$

Remarque : ici, on écrit la composition des torseurs, mais cela revient à écrire le composition du vecteur taux de rotation ET la composition du vecteur vitesse.

Le sujet nous dit qu'il faut passer par le solide 1. On aurait pu aussi le voir en regardant le graphe de liaisons. En effet, on prend un chemin du graphe de liaisons qui ne met pas en œuvre un autre RSG. Le seul chemin possible est 2-1-0.

Question 3 Écrire en I le torseur cinématique du mouvement $2/0$.

Le torseur cinématique de $2/0$ en I s'écrit sous la forme :

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\}_I = {}_I\left\{\begin{array}{c} p\vec{x}_0 + q\vec{y}_0 + (r+\dot{\theta})\vec{z}_0 \\ \vec{V}_{I,2/0} \end{array}\right\}$$

Or, on connait le torseur en C, donc on utilise la formule du changement de point pour calculer $\vec{V}_{I,2/0}$ (le vecteur taux de rotation est indépendant du point, donc on a juste à le recopier) :

$$\vec{V}_{I,2/0} = \vec{V}_{C,2/0} + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$$

$$\vec{V}_{I,2/0} = \dot{x}.\vec{x}_0 + \dot{y}.\vec{y}_0 + R.\vec{z}_0 \wedge (p\vec{x}_0 + q\vec{y}_0 + (r+\dot{\theta})\vec{z}_0)$$

Donc :

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\}_I = {}_I\left\{\begin{array}{c} p\vec{x}_0 + q\vec{y}_0 + (r+\dot{\theta})\vec{z}_0 \\ (\dot{x} - R.q).\vec{x}_0 + (\dot{y} + R.p).\vec{y}_0 \end{array}\right\}$$

Question 4 Expliciter la condition de roulement sans glissement en I. En déduire $\vec{\Omega}(2/1)$ en fonction des données. Reste-t-il une composante inconnue ?

Il y a roulement sans glissement (RSG) en I entre 2 et 0, donc $\vec{V}_{I,2/0} = \vec{0}$.

On a donc :

$$p = -\frac{\dot{y}}{R}$$

$$q = \frac{\dot{x}}{R}$$

$$r = ???$$

Les composantes p et q sont les composantes du vecteur rotation de roulement.

Question 5 Expliciter la condition de roulement sans glissement en J. En appliquant une démarche similaire à ce qui a été fait pour I, déduire $\vec{\Omega}_{3/1}$ en fonction des données. Que dire de la composante inconnue ?

Il y a roulement sans glissement (RSG) en J entre 3 et 2, donc $\vec{V}_{J,3/2} = \vec{0}$.

On écrit la composition du vecteur vitesse. On doit trouver un chemin dans le graphe de liaisons entre 3 et 2 qui ne met pas en œuvre un autre RSG. Le seul chemin possible est de passer par 3-1-2. Donc :

$$\vec{V}_{J,3/2} = \vec{V}_{J,3/1} + \vec{V}_{J,1/2}$$

On calcule chacun de ces vecteurs vitesses.

$$\vec{V}_{J,3/2} = (\vec{V}_{L,3/1} + \vec{JL} \wedge \vec{\Omega}_{3/1}) + (\vec{V}_{C,1/2} + \vec{JC} \wedge \vec{\Omega}_{1/2})$$

$$\vec{V}_{J,3/2} = (\vec{0} - a.\vec{x}_1 \wedge \omega_{31}.\vec{y}_1) + (\vec{0} + R.\vec{x}_1 \wedge (-p\vec{x}_0 - q\vec{y}_0 - r\vec{z}_0))$$

$$\vec{V}_{J,3/2} = -a.\omega_{31}.\vec{z}_1 + R.p.\sin\theta\vec{z}_0 - R.q.\cos\theta\vec{z}_0 + r.R.\vec{y}_1$$

On trouve alors :

$$r = 0$$

et :

$$\omega_{31} = -\frac{\dot{y}.\sin\theta + \dot{x}.\cos\theta}{a}$$

La composante r du vecteur taux de rotation de 2/0, et celle autour de $\vec{z}_0$, il s'agit donc du pivotement.

Question 6 De même, expliciter la condition de roulement sans glissement en K et en déduire $\vec{\Omega}(4/1)$ en fonction des données.

Il y a roulement sans glissement (RSG) en K entre 4 et 2, donc $\vec{V}_{K,4/2} = \vec{0}$.

On écrit la composition du vecteur vitesse. On doit trouver un chemin dans le graphe de liaisons entre 4 et 2 qui ne met pas en œuvre un autre RSG. Le seul chemin possible est de passer par 4-1-2. Donc :

$$\vec{V}_{K,4/2} = \vec{V}_{K,4/1} + \vec{V}_{K,1/2}$$

On calcule chacun de ces vecteurs vitesses.

$$\vec{V}_{K,4/2} = (\vec{V}_{M,4/1} + \vec{KM} \wedge \vec{\Omega}_{4/1}) + (\vec{V}_{C,1/2} + \vec{KC} \wedge \vec{\Omega}_{1/2})$$

$$\vec{V}_{K,4/2} = (\vec{0} + a.\vec{y}_1 \wedge \omega_{41}.\vec{x}_1) + (\vec{0} - R.\vec{y}_1 \wedge (-p\vec{x}_0 - q\vec{y}_0))$$

$$\vec{V}_{K,4/2} = -a.\omega_{41}.\vec{z}_1 - R.p.\cos\theta\vec{z}_0 - R.q.\sin\theta\vec{z}_0$$

On trouve alors :

$$\omega_{41} = \frac{\dot{y}.\cos\theta - \dot{x}.\sin\theta}{a}$$

Question 7 Exprimer les vitesses de déplacement de la souris $\dot{x}$ et $\dot{y}$ en fonction de la mesure de la rotation des encodeurs ω_{31} et ω_{41}.

À partir des 2 relations établies précédemment, en les multipliant respectivement par cos et sin, et en faisant la somme et la différence, on obtient :

$$\dot{x} = -a.\omega_{41}.\sin\theta - a.\omega_{31}.\cos\theta$$

$$\dot{y} = a.\omega_{41}.\cos\theta - a.\omega_{31}.\sin\theta$$

Question 8 Lorsque l'on utilise la souris, l'angle θ ne varie pas beaucoup. On fait donc l'hypothèse que l'angle θ est très petit devant 1. Que deviennent les relations précédentes ? Quelles relations faudra-t-il entrer dans le driver de la souris ?

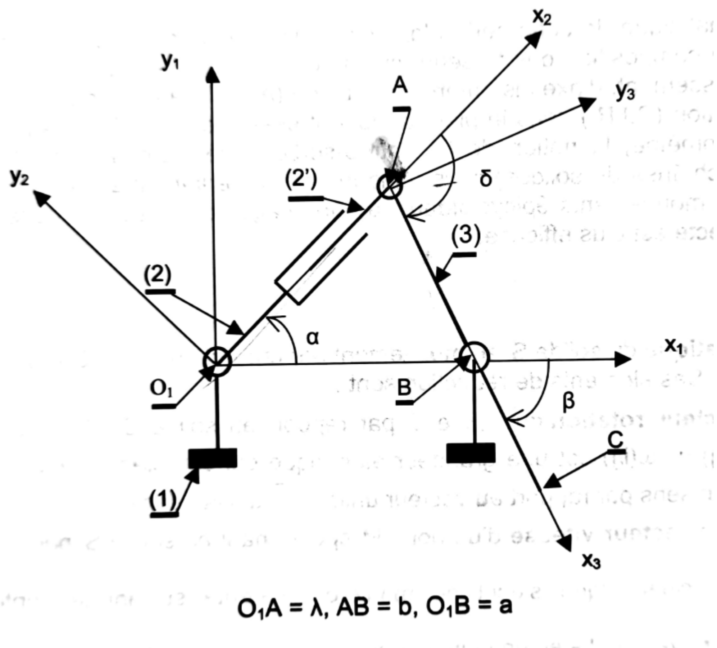
En tenant compte du fait que $\theta \ll 1$, on a alors :

$$\dot{x} = -a.\omega_{31}$$

$$\dot{y} = a.\omega_{41}$$

4 Exercice "Vieille-école" 1 : mécanisme de levage

Le schéma ci-joint représente une dispositif de levage constitué :
- du vérin de corps (2) et de tige (2')
- du levier 3
- du bâti (1)



Question 1 Écrire l'équation de fermeture des torseurs cinématiques de la chaîne de solides [(1),(2),(2'),(3),(1). En déduire les deux équations vectorielles qui lient l'une les vitesses de rotation, l'autre les vitesses du point A.

Question 2 Déterminer la relation entre $\dot{\beta}$ et $\dot{\lambda}$

Question 3 De même pour $\dot{\alpha}$ et $\dot{\lambda}$

4.1 [Hors Programme] Cinématique graphique 1

La vitesse de montée de la charge est donnée et son module est 0.2 m/s.

Question 4 Effectuer les tracés graphiques qui permettent d'obtenir la vitesse de translation de la tige du vérin par rapport au corps de ce dernier. Donner la valeur numérique de cette vitesse.