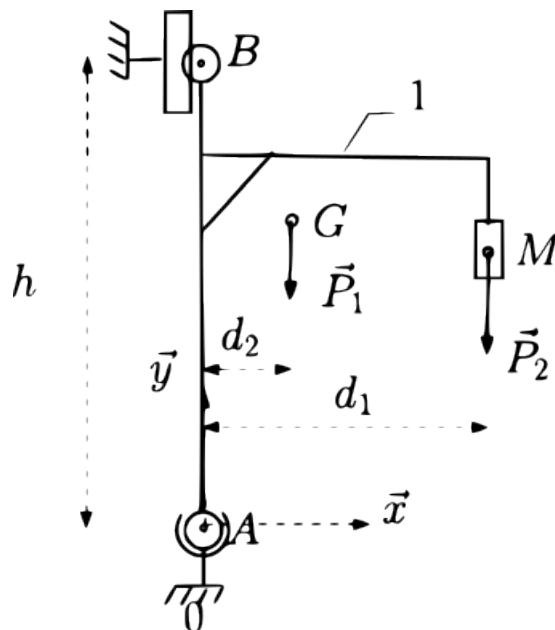


## Table des matières

1	Exercice 1 - Potence	1
2	Exercice 2 - Compresseur	3
3	Exercice 3 - Remontée mécanique	9
4	Exercice 4 - Embrayage centrifuge	11

### 1 Exercice 1 - Potence

On considère dans cet exercice une potence d'atelier destinée à soulever des charges de poids  $\vec{P}_2$  appliquée en un point M et le poids de la potence elle-même peut être modélisée par une force  $\vec{P}_1$  appliquée au centre d'inertie de la potence G. Les valeurs de  $P_1$  et  $P_2$  sont supposées connues. La potence notée 1 est en liaison sphérique au point A avec le bâti 0 et en liaison sphère-cylindre au point B. Les distances utiles à la résolution du problème sont indiquées sur la figure.



**Question 1** Déterminer les torseurs des actions mécaniques  $\{\mathcal{T}_{(\vec{P}_1 \rightarrow 1)}\}$  et  $\{\mathcal{T}_{(\vec{P}_2 \rightarrow 1)}\}$  appliquées par les deux forces sur le solide 1, ainsi que les torseurs des actions mécaniques associées aux liaisons rotule/sphérique et annulaire/ sphère-cylindre  $\{\mathcal{T}_{(0^A \rightarrow 1)}\}$  et  $\{\mathcal{T}_{(0^B \rightarrow 1)}\}$ .

1. Les deux forces correspondent aux torseurs glisseurs :

$$\{\mathcal{T}_{(\vec{P}_1 \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_M \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{(\vec{P}_2 \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -P_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$

et les torseurs associés aux liaisons sont (cf tableau des liaisons normalisées) :

$$\{\mathcal{T}_{(0^A \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01}^A & 0 \\ Y_{01}^A & 0 \\ Z_{01}^A & 0 \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{(0^B \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01}^B & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{01}^B & 0 \end{array} \right\}_B$$

Remarque : Ici il n'y a qu'un seul repère, donc il n'y a pas d'ambiguïté sur le repère dans lequel est exprimé le torseur. S'il y avait plusieurs repère, il faudrait préciser dans quel repère le torseur est exprimé.

**Question 2** Combien y a-t'il d'inconnues dans le problème, et combien aura-t'on d'équations pour le résoudre. Le problème est-il bien posé ?

2. En première analyse, on voit que l'on a 5 inconnues et 6 équations (3 équation sur la résultante, et 3 équations sur le moment pour le PFS), donc il semblerait que l'on aie une équation de trop. En réalité, on voit que le problème est entièrement 2 D, donc les deux inconnues  $Z_{01}^A$  et  $Z_{01}^B$  vont s'annuler. Au final, on aura 3 inconnues et seulement deux équations pour la résultante (suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ ) et une équation pour le moment moment (suivant  $\vec{z}$ ) seront utiles. On aura donc 3 équations et 3 inconnues, le problème est bien posé.

**Question 3** En appliquant le Principe Fondamental de la Statique, déterminer toutes les inconnues de liaison.

3. Ici il n'y a pas trop de question à se poser sur le solide à isoler puisqu'il n'y en a qu'un (hors bâti), le solide 1. La seule question à se poser est en quel point écrire l'équation du moment. Il faut toujours choisir le point où le transport des moments sera le plus simple. Le torseur possédant le plus grand nombre de composantes pour la résultante est le torseur associé à la liaison rotule. Ce sera le plus dur à transporter, il faut donc préférentiellement choisir ce point pour écrire le PFS. On aura donc pour la résultante, le système d'équation :

$$\begin{cases} X_{01}^A + X_{01}^B = 0 \\ -P_1 - P_2 + Y_{01}^A = 0 \\ Z_{01}^A + Z_{01}^B = 0 \end{cases}$$

Pour les moments la première étape est de les transporter :

$$\begin{cases} M_A(\vec{P}_1 \rightarrow 1) = M_M(\vec{P}_1 \rightarrow 1) - P_1 \vec{y} \wedge \overrightarrow{MA} = \vec{0} - P_1 \vec{y} \wedge (-d_1 \vec{x} + ?? \vec{y}) = -P_1 d_1 \vec{z} \\ M_A(\vec{P}_2 \rightarrow 1) = M_G(\vec{P}_2 \rightarrow 1) - P_2 \vec{y} \wedge \overrightarrow{GA} = \vec{0} - P_2 \vec{y} \wedge (-d_2 \vec{x} + ?? \vec{y}) = -P_2 d_2 \vec{z} \\ M_A(0^B \rightarrow 1) = [X_{01}^B \vec{x} + Z_{01}^B \vec{z}] \wedge (-h \vec{y}) = -h X_{01}^B \vec{z} + h Z_{01}^B \vec{x} \end{cases}$$

Au final les 3 équations sur moments sont donc :

$$\begin{cases} hZ_{01}^B = 0 \\ 0 = 0 \\ hX_{01}^B + P_1d_1 + P_2d_2 = 0 \end{cases}$$

Au final on obtient en résolvant ce système :

$$\begin{cases} X_{01}^A = -X_{01}^B = (P_1d_1 + P_2d_2) / h \\ Y_{01}^A = P_1 + P_2 \\ Z_{01}^A = Z_{01}^B = 0 \end{cases}$$

## 2 Exercice 2 - Compresseur

### Présentation

Certaines machines utilisent de l'énergie pneumatique pour actionneurs. Un micro-compresseur permet de fournir de l'air sous pression (de 5 à 10 bar). Il fonctionne généralement de façon intermittente. L'air sous pression est stocké dans un réservoir. Le compresseur est lui-même entraîné par un moteur électrique.

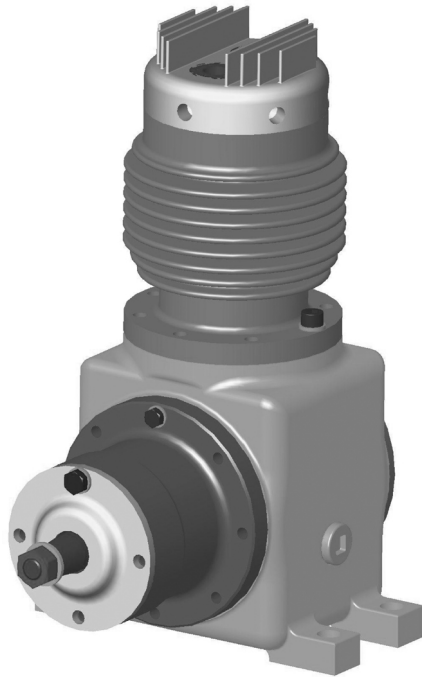


FIGURE 1 – Vue extérieure du compresseur

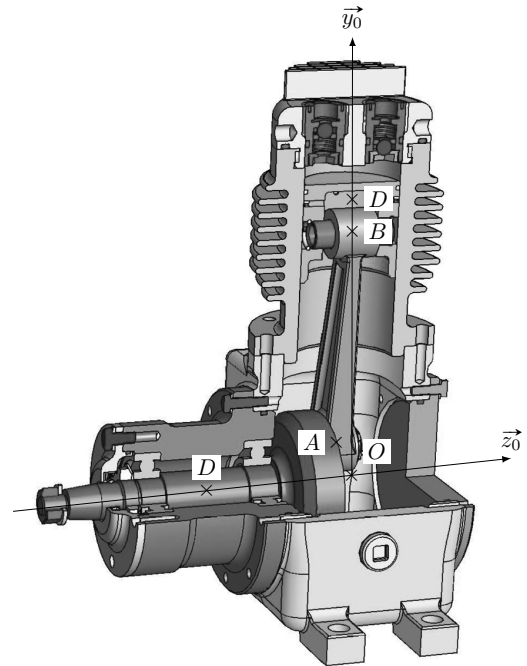


FIGURE 2 – Vue en écorché de l'intérieur du compresseur

La figure 2 présente une vue extérieure du compresseur. On distingue l'arbre moteur, lié au moteur électrique et les orifices d'admission et de refoulement d'air.

Le principe de fonctionnement est basé sur celui d'un système bielle-manivelle. Le mouvement d'aller-retour du piston (3) permet d'augmenter puis de diminuer alternativement le volume d'une

chambre. Deux clapets anti-retour assurent la distribution du gaz. Un clapet autorise l'air extérieur à rentrer dans la chambre lorsque le piston descend et l'empêche de ressortir. Le second clapet autorise l'air à sortir vers la bombonne lorsque sa pression est suffisante pour ouvrir le clapet.

La compression d'un gaz s'accompagnant d'une élévation de sa température, des ailettes de refroidissement sont disposées autour de la chambre de compression.

Le dimensionnement du moteur électrique et des liaisons nécessite de déterminer le couple moteur nécessaire pour atteindre 10 bar, ainsi que les efforts dans les liaisons entre solides et en particulier les efforts dans les deux roulements guidant l'arbre moteur en rotation. Les effets dynamiques sont supposés négligeables devant les efforts dus à la pression de l'air, ce qui permet de considérer les pièces en équilibre quasi-statique.

Pour répondre à cet objectif, il faut successivement :

- modéliser le système pour faire apparaître ses propriétés en termes d'efforts ;
- modéliser les efforts extérieurs et ceux entre solides ;
- traduire l'équilibre des solides afin de trouver les lois liant les forces s'exerçant dans le système.

## Modélisation

Le mécanisme est constitué d'un assemblage de solides indéformables (la géométrie des pièces peut être considérée comme invariante). La modélisation statique reprend le graphe de liaisons et le schéma cinématique pour modéliser le système. Attention toutefois car il s'agit cette fois de *modéliser les actions mécaniques transmissibles* : le choix des liaisons peut être différent de celui envisagé pour l'étude des mouvements.

Le schéma cinématique (paramétré) est donné sur la figure 3.

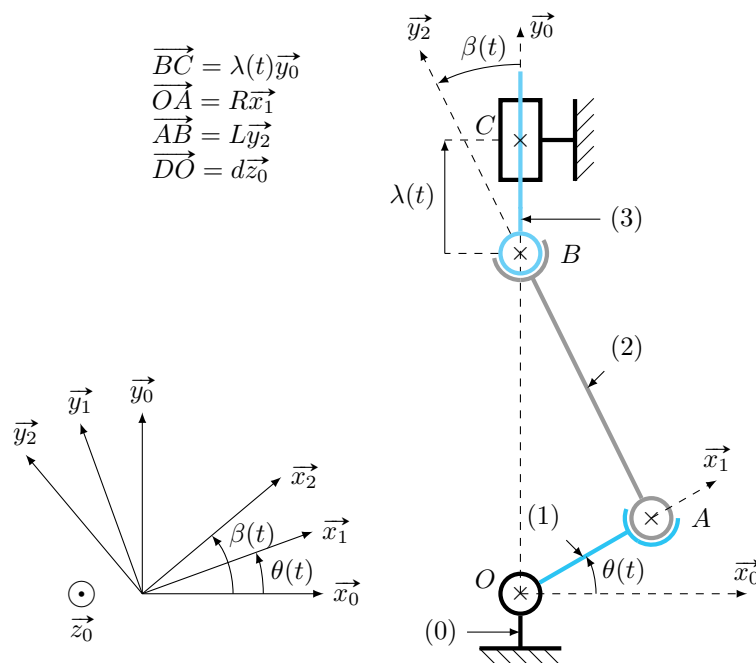


FIGURE 3 – Schéma cinématique et paramétrage du compresseur

La liaison entre le piston (3) et le bâti (0) est réalisée par un contact cylindre-cylindre et se modélise

naturellement par une liaison pivot glissant d'axe  $(C, \vec{y}_0)$ .

Les deux liaisons de part et d'autre de la bielle (2) sont réalisées par des contacts cylindre-cylindre relativement courts par rapport au diamètre, ce qui conduit à les modéliser par des liaisons sphériques de centres  $A$  et  $B$ .

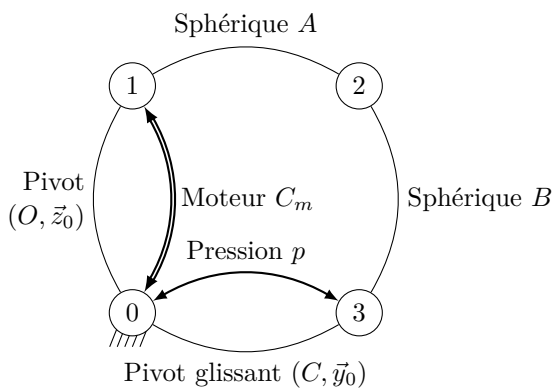
Pour le guidage de l'arbre (1) par rapport au bâti (0), sans rentrer dans le détail, l'ensemble des deux roulements est modélisé par une liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z}_0)$ , bloquant tous les mouvements hormis la rotation suivant la direction  $\vec{z}_0$ .

### Objectif

Déterminer le couple moteur  $C_m$  en fonction de la position angulaire du moteur  $\theta$  et de la pression  $p$ .

### Travail demandé

**Question 1** Tracer le graphe de structure de ce mécanisme.



Pour résoudre ce problème, on va appliquer le PFS dans un premier temps à la bielle 2, puis à l'arbre 1 et enfin au piston 3.

### Isolement de la bielle 2

**Question 2** Écrire le torseur de l'action mécanique du piston 3 sur la bielle 2, noté  $\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 2}\}$ .

la liaison sphérique de centre  $B$  transmet une force appliquée en  $B$ . En exprimant la force dans la base  $B_2$  :  $\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} B \\ \left( \begin{matrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{matrix} \right)_{B_2} \end{matrix} .$

**Question 3** Écrire le torseur de l'action mécanique de l'arbre 1 sur la bielle 2, noté  $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}$ .

De même, la liaison sphérique de centre  $A$  transmet une force appliquée en  $A$ . En exprimant la force dans la base  $B_2$  :  $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} A \\ \left( \begin{matrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{matrix} \right)_{B_2} \end{matrix} .$

**Question 4** Écrire les 6 équations du PFS appliqué à la bielle 2.

Le principe fondamental de la statique appliqué à la bielle (2) s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

Un point de réduction bien adapté est  $A$  ou  $B$ . Si le point  $A$  est choisi<sup>1</sup> :

$$\overrightarrow{M_{A,3 \rightarrow 2}} = \overrightarrow{M_{B,3 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 2}} \wedge \overrightarrow{BA} = \vec{0} + \begin{pmatrix} X_{32} \\ Y_{32} \\ Z_{32} \end{pmatrix}_{B_2} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} LZ_{32} \\ 0 \\ -LX_{32} \end{pmatrix}_{B_2}$$

Les équations vectorielles de résultante et de moment en  $A$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 2}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A,1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{M_{A,3 \rightarrow 2}} = \vec{0} \end{cases}$$

D'où les équations scalaires projetées dans la base  $B_2$  :

$$\begin{cases} X_{12} + X_{32} = 0 \\ Y_{12} + Y_{32} = 0 \\ Z_{12} + Z_{32} = 0 \\ 0 + LZ_{32} = 0 \\ 0 + 0 = 0 \\ 0 - LX_{32} = 0 \end{cases}$$

Ce système d'équation se résout partiellement et conduit à des simplifications :  $X_{12} = X_{32} = Z_{12} = Z_{32} = 0$  et  $Y_{12} = -Y_{32}$ . Les torseurs d'actions mécaniques peuvent se simplifier :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \quad \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B$$

## Isolement de l'arbre 1

**Question 5** Écrire le torseur de l'action mécanique de la bielle 2 sur l'arbre 1, noté  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}$ .

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

**Question 6** Écrire le torseur de l'action mécanique du bâti 0 sur l'arbre 1 noté  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\}$ .

La liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z}_0)$  entre le bâti (0) et l'arbre (1) bloque les trois translations et deux rotations. Lorsqu'un mouvement est bloqué, cela sous-entend que la liaison est susceptible de transmettre une action qui empêche le mouvement.

1. Le résultat obtenu aurait été exactement identique si le point  $B$  avait été choisi pour cette étude.

La liaison est donc capable de transmettre une force  $\overrightarrow{F_{0 \rightarrow 1}}$  suivant les trois directions pour bloquer les translations et un moment  $\overrightarrow{M_{D,0 \rightarrow 1}}$  suivant les deux directions  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  pour bloquer les rotations :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{matrix} O \\ \left( \begin{array}{cc} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{array} \right) \\ B_0 \end{matrix} .$$

**Question 7** Écrire le torseur de l'action extérieure du moteur sur l'arbre 1, noté  $\{\mathcal{T}_{mot \rightarrow 1}\}$ .

L'action du moteur est un couple (ou un moment) car elle tend à faire tourner l'arbre suivant l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ . Elle se modélise sous la forme d'un torseur couple colinéaire à  $\vec{z}_0$  :  $\{\mathcal{T}_{mot \rightarrow 1}\} = \begin{matrix} O \\ \left( \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{array} \right) \end{matrix}$ .

**Question 8** Écrire les 6 équations du PFS appliqué à l'arbre 1.

Le principe fondamental de la statique appliqué à l'arbre (1) s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{mot \rightarrow 1}\} = \{0\}$$

Le torseur de (0) sur (1) est celui qui présente le plus d'inconnues. Pour éviter que les inconnues ne se propagent dans les équations du PFS, il est judicieux de calculer les moments en  $O$  :

$$\overrightarrow{M_{O,2 \rightarrow 1}} = \overrightarrow{M_{A,2 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} \wedge \overrightarrow{AO} = \vec{0} + Y_{21} \vec{y}_2 \wedge (-R \vec{x}_1) = R Y_{21} \cos(\beta - \theta) \vec{z}_0$$

Les équations vectorielles de résultante et de moment en  $O$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{F_{mot \rightarrow 1}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{M_{O,2 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{M_{O,mot \rightarrow 1}} = \vec{0} \end{cases}$$

D'où les équations scalaires, projetées dans la base  $B_0$  :

$$\begin{cases} X_{01} - Y_{21} \sin \beta & + 0 & = 0 \\ Y_{01} + Y_{21} \cos \beta & + 0 & = 0 \\ Z_{01} + 0 & + 0 & = 0 \\ L_{01} + 0 & + 0 & = 0 \\ M_{01} + 0 & + 0 & = 0 \\ 0 & + R Y_{21} \cos(\beta - \theta) + C_m & = 0 \end{cases}$$

### Isolement du piston 3

**Question 9** Écrire le torseur de l'action mécanique de la bielle 2 sur le piston 3, noté  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\}$ .

La liaison sphérique de centre  $B$  ne bloquant aucune rotation, elle ne peut transmettre qu'une force appliquée en son centre (torseur de type glisseur). En exprimant la force dans la base  $B_2$  :

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{matrix} B \\ \left( \begin{array}{cc} X_{23} & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ Z_{23} & 0 \end{array} \right) \\ B_2 \end{matrix} .$$

**Question 10** Écrire le torseur de l'action mécanique du bâti 0 sur le piston 3, noté  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}\}$ .

De même, la liaison pivot-glissant d'axe  $(B, \vec{y}_0)$  du bâti (0) sur le piston (3) est capable de transmettre une force  $\vec{F}_{0 \rightarrow 3}$  suivant les deux directions de translation bloquées  $\vec{x}_0$  et  $\vec{z}_0$ , ainsi qu'un moment  $\vec{M}_{B,0 \rightarrow 3}$  suivant les deux directions de rotation bloquées  $\vec{x}_0$  et  $\vec{z}_0$  :  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{03} & L_{03} \\ 0 & 0 \\ Z_{03} & N_{03} \end{array} \right\}_{B_0}$ .

**Question 11** Écrire le torseur de l'action mécanique de l'air sur le piston 3, noté  $\{\mathcal{T}_{air \rightarrow 3}\}$ .

L'air exerce sur la surface  $S$  du piston une pression  $p$  uniforme, dont la résultante globale peut être représentée par une force appliquée au centre  $C$  de la surface (glisseur) :  $\{\mathcal{T}_{air \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C \end{array} \right\}$ .  
 $\vec{F}_{air \rightarrow 3} = -pS\vec{y}_0$

**Question 12** Écrire les 6 équations du PFS appliqué au piston 3.

Le principe fondamental de la statique appliqué au piston (3) s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\} + \{\mathcal{T}_{air \rightarrow 3}\} = \{0\}$$

Le torseur de (0) sur (3) est celui qui présente le plus d'inconnues. Pour éviter que les inconnues d'actions mécaniques ne se propagent dans les équations du PFS, il est judicieux de calculer les moments en  $B$  :

$$\vec{M}_{B,air \rightarrow 3} = \vec{M}_{C,air \rightarrow 3} + \vec{F}_{air \rightarrow 3} \wedge \vec{CB} = \vec{0} + (-pS\vec{y}_0) \wedge (-l\vec{y}_0) = \vec{0}$$

Les équations vectorielles de résultante et de moment en  $B$  s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{0 \rightarrow 3} + \vec{F}_{2 \rightarrow 3} + \vec{F}_{air \rightarrow 3} = \vec{0} \\ \vec{M}_{B,0 \rightarrow 3} + \vec{M}_{B,2 \rightarrow 3} + \vec{M}_{B,air \rightarrow 3} = \vec{0} \end{array} \right.$$

D'où les équations scalaires, projetées dans la base  $B_0$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_{03} - Y_{23} \sin \beta + 0 = 0 \\ 0 + Y_{23} \cos \beta - pS = 0 \\ Z_{03} + 0 + 0 = 0 \\ L_{03} + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ N_{03} + 0 + 0 = 0 \end{array} \right.$$

## Conclusion

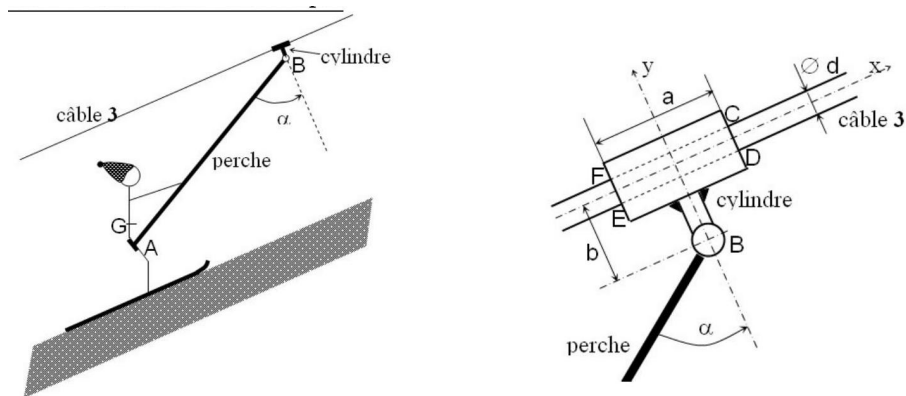
**Question 13** En conclure l'expression de  $C_m$  en fonction de  $\theta$ ,  $p$  et des caractéristiques géométriques du mécanisme.

Le système d'équations obtenu par les 3 isolements permet de déterminer l'ensemble des inconnues.

La méthode employée pour résoudre cet exemple est assez systématique et représentative de la démarche d'isolement. Néanmoins, lorsqu'il n'est pas nécessaire de calculer toutes les inconnues du problème, des méthodes plus efficaces sont préférables. Les stratégies de résolution plus efficaces seront vues par la suite.



### 3 Exercice 3 - Remontée mécanique



#### Hypothèses et données :

- le problème est suppose plan ;
- le frottement entre la piste et les skis est négligé ;
- le coefficient de frottement entre le cylindre 2 et le câble 3 est noté  $f$  ;
- la liaison entre la perche et le cylindre 2 est une liaison pivot sans frottement de centre  $B$  ;
- l'action du skieur sur la perche est modélisée par un glisseur passant par  $A$  (l'action de la main sur la perche est négligée) ;
- le centre de gravité du skieur, de masse  $m$  (avec son équipement), est en  $G$ .

#### Travail demandé

Le but de l'exercice est de déterminer l'angle minimal entre la perche et la normale au câble pour qu'il n'y ait pas glissement entre la perche et le câble et de montrer que le poids des skieurs n'influe pas sur ces conditions de non glissement.

**Question 1** Déterminer graphiquement le point d'application de l'action de la piste sur les skis.

On cherche le point d'application de l'action mécanique de la piste sur les skis en sachant que le frottement est négligé au niveau du contact piste/ski (l'action est donc normale au plan de contact). Partons de ce que nous connaissons, le poids du skieur (avec son équipement). Considérons donc le système { le skieur et son équipement }. Il est en équilibre sous l'action de 3 glisseurs modélisant respectivement l'action de la piste, l'action du poids, et l'action de la perche. On en déduit donc que les 3 forces sont concourantes. Seule l'action de la pesanteur est parfaitement connue. Pour déterminer ce point d'intersection, isolons la perche. Celle-ci est en équilibre sous l'action de 2 glisseurs, l'action du skieur en  $A$  et l'action du cylindre en  $B$ , les efforts sont donc portés par l'axe  $(AB)$  (et sont également égaux en norme et de directions opposées). L'action mécanique de la piste sur les skis s'applique donc au point défini par l'intersection du sol avec la perpendiculaire au sol passant par l'intersection de la verticale passant par  $G$  et la droite  $(AB)$ .

**Question 2** Compte-tenu du jeu entre le cylindre 2 et le câble 3, préciser en quels points se fait le contact entre ces deux solides.

Compte tenu de l'action du skieur sur la perche, le contact entre le cylindre et le câble se fait aux points  $C$  et  $E$ .

**Question 3** Déterminer l'angle  $\alpha$  minimal pour qu'il n'y ait pas glissement entre le cylindre 2 et le câble 3 .

Retrouvons les 4 étapes de résolution d'un problème de statique

1. Soit le système { Cylindre }

2. BAME

$$\bullet \{ \mathcal{T}_{\text{perche} \rightarrow \text{cyl.}} \} = \begin{Bmatrix} X_B & - \\ Y_B & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}} \bullet \{ \mathcal{T}_{C,3 \rightarrow \text{cyl.}} \} = \begin{Bmatrix} X_C & - \\ Y_C & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{R}} \bullet \{ \mathcal{T}_{E,3 \rightarrow \text{cyl.}} \} = \begin{Bmatrix} X_E & - \\ Y_E & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{E, \mathcal{R}} .$$

3. Principe Fondamental de la Statique appliqué au point  $B$  :

$$\{ \mathcal{T}_{\text{perche} \rightarrow \text{cyl.}} \} + \{ \mathcal{T}_{C,3 \rightarrow \text{cyl.}} \} + \{ \mathcal{T}_{E,3 \rightarrow \text{cyl.}} \} = \{0\}$$

4. Transport des moments :

$$\vec{M}_{C,3 \rightarrow \text{cyl.}}(B) = \vec{M}_{C,3 \rightarrow \text{cyl.}}(C) + \overrightarrow{BC} \wedge [X_C \vec{x} + Y_C \vec{y}] = \left[ \frac{a}{2} \vec{x} + \left( b + \frac{d}{2} \right) \vec{y} \right] \wedge [X_C \vec{x} + Y_C \vec{y}]$$

$$\rightarrow \vec{M}_{C,3 \rightarrow \text{cyl.}}(B) = \left[ \frac{a}{2} Y_C - \left( b + \frac{d}{2} \right) X_C \right] \vec{z}$$

$$\vec{M}_{E,3 \rightarrow \text{cyl.}}(B) = \vec{M}_{E,3 \rightarrow \text{cyl.}}(E) + \overrightarrow{BE} \wedge [X_E \vec{x} + Y_E \vec{y}] = \left[ \frac{-a}{2} \vec{x} + \left( b - \frac{d}{2} \right) \vec{y} \right] \wedge [X_E \vec{x} + Y_E \vec{y}]$$

$$\rightarrow \vec{M}_{E,3 \rightarrow \text{cyl.}}(B) = \left[ \frac{-a}{2} Y_E - \left( b - \frac{d}{2} \right) X_E \right] \vec{z}$$

En application du PFS, on peut donc écrire le système d'équation

$$\begin{cases} 0 = X_B + X_C + X_E \\ 0 = Y_B + Y_C + Y_E \\ 0 = \frac{a}{2} Y_C - \left( b + \frac{d}{2} \right) X_C + \frac{-a}{2} Y_E - \left( b - \frac{d}{2} \right) X_E \end{cases}$$

On cherche l'angle limite de la perche par rapport au cylindre pour que celui-ci soit entraîné par le câble. On considère donc un contact en  $C$  et  $E$  avec frottement à la limite du glissement. Ainsi,  $|X_C| = f |Y_C|$  et  $|X_E| = f |Y_E|$ . S'il y a glissement du cylindre par rapport au câble, la vitesse est dirigée suivant  $-\vec{x}$ , ainsi,  $X_C > 0$  et  $Y_E > 0$ . Or,  $Y_C > 0$  et  $Y_E < 0$ , donc  $X_C = f Y_C$  et  $X_E = -f Y_E$ .

Soit  $\alpha$ , l'angle limite permettant le non glissement du cylindre sur le câble. D'après le support de l'action de la perche sur le cylindre (voir question 1), on a  $X_B = -F \sin \alpha$  et  $Y_B = -F \cos \alpha$ . Le système devient :

$$\begin{cases} 0 = -F \sin \alpha + f (Y_C - Y_E) \\ 0 = -F \cos \alpha + Y_C + Y_E \\ 0 = \left( \frac{a}{2} - f b - f \frac{d}{2} \right) Y_C + \left( \frac{-a}{2} - f b + f \frac{d}{2} \right) Y_E \end{cases}$$

D'après les deux premières équations, on obtient :

$$Y_C = \frac{F}{2f}(f \cos \alpha + \sin \alpha) \text{ et } Y_E = \frac{F}{2f}(f \cos \alpha - \sin \alpha).$$

Avec des deux résultats et la dernière équation du système, on obtient

$$\frac{Y_C}{Y_E} = \frac{a + 2fb - fd}{a - 2fb - fd} = \frac{f \cos \alpha + \sin \alpha}{f \cos \alpha - \sin \alpha} \rightarrow \tan \alpha = \frac{2f^2b}{a - fd}.$$

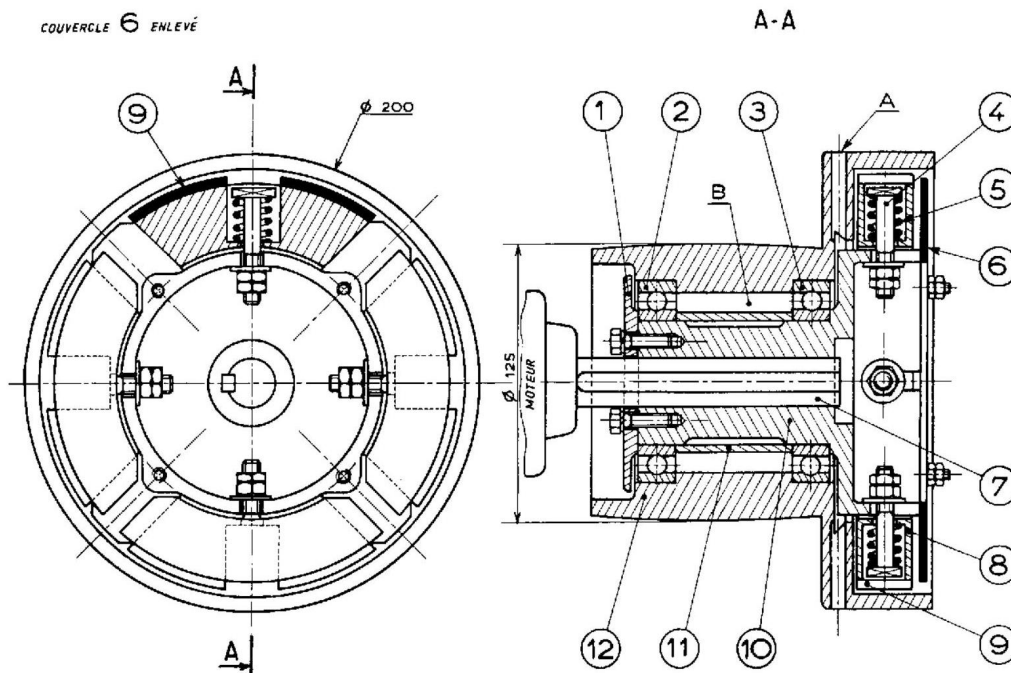
**Question 4** Montrer que le poids des skieurs n'influe pas sur le glissement de la perche. Rappeler le nom de ce phénomène.

L'angle  $\alpha$  limite ne dépend que de paramètres géométriques du cylindre et du coefficient de frottement entre le cylindre et le câble. L'action du skieur,  $F$ , n'intervient pas, son poids non plus.

#### 4 Exercice 4 - Embrayage centrifuge

Certains moteurs électriques doivent démarrer à vide, parce que leur couple de démarrage est faible. D'autre part, pour gagner du temps et éviter une manœuvre, il y a intérêt à faire assurer automatiquement l'embrayage dès que la vitesse atteint une valeur convenable. La solution mécanique évidente de ce problème consiste à utiliser ici la force d'inertie centrifuge comme effort presseur provoquant l'adhérence. Des masses (ou masselottes), guidées en translation ou en rotation sur la partie motrice, agissent radialement à l'intérieur d'un tambour récepteur.

Le mécanisme ci-dessous représente un type d'embrayage centrifuge simple, mais à dire vrai peu perfectionné. Il est combiné avec la poulie du moteur électrique sur lequel il est monté.



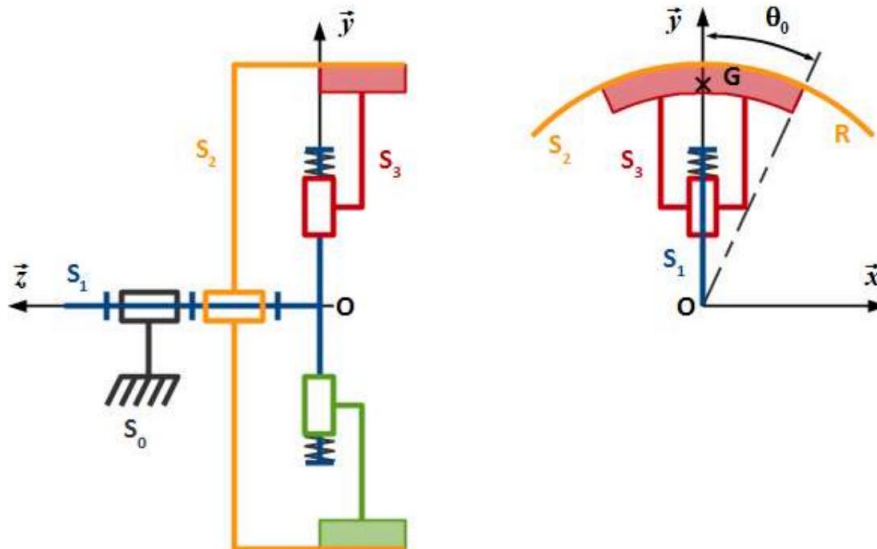
L'arbre 10 claveté sur l'axe du moteur 7 entraîne 4 masselottes 8 portant extérieurement une garniture 9. Ces masselottes logées dans des alvéoles sont maintenues en place par les boulons 4 et

les ressorts 5 de tension réglable. L'intervalle B est garni de graisse. Les roulements ne servent qu'au démarrage, ce qui explique qu'il n'y a pas de système d'étanchéité pour le lubrifiant. Celui-ci est projeté, le cas échéant, par les trous A plutôt que de se trouver conduit sur les surfaces d'adhérence.

### Notations

- $p$  : pression de contact supposée uniforme entre l'arbre de sortie  $S_2$  et les masselottes  $S_3$  ;
- $f$  : coefficient de frottement entre  $S_2$  et  $S_3$  ;
- $L$  : largeur des garnitures ;
- $T$  : tension des ressorts de rappel des masselottes ;
- $M$  : masse d'une masselotte ;
- $\omega_m$  : vitesse de rotation de l'arbre moteur  $S_1$  ;
- $C_g$  : couple transmissible par l'embrayage (ou couple de glissement) ;

### Schématisation du mécanisme



### Hypothèses

- toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact  $S_2/S_3$  ;
- les poids des pièces sont négligés devant les autres actions mécaniques ;
- Seul le régime stabilisé sera considéré (les vitesses de rotation sont supposées constantes). Dans ce cas, le principe fondamental de la statique peut s'appliquer à tout sous ensemble du mécanisme à condition de prendre en compte la force d'inertie centrifuge s'exerçant sur chaque masselotte :

$$\{\mathcal{T}_{\text{inertie} \rightarrow S_3}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{i \rightarrow 3} = MR_G \omega_m^2 \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ avec } R_G = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{y} \text{ où } G \text{ représente le centre de masse de } S_3.$$

**Question 1** En isolant  $S_3$ , déterminer une relation liant la pression de contact  $p$  et la vitesse de rotation  $\omega_m$  en régime stabilisé.

**Question 2** Déterminer la relation exprimant le couple transmissible par l'embrayage  $C_g$  en fonction de la vitesse de rotation  $\omega_m$ .

**Question 3** Tracer l'allure de cette courbe.