Corrigé du devoir en temps libre n°9

Problème I

1. Soit $x > 0$. On a $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[,\mathbb{R})$ puis

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{avec} \quad 1-x<1 \quad \text{et} \quad t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } x>0, \text{ la fonction } t\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \text{ est intégrable sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue, strictement positive sur $]\,0\,;+\infty\,[$ d'où par séparation de l'intégrale

$$\boxed{\forall x>0 \qquad \Gamma(x)>0}$$

3. On pose $$\forall (x,t) \in \,]\,0\,;+\infty\,[^2 \qquad f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$$

Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.
• Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et intégrable d'après le résultat de la première question.
• Pour $t > 0$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[,\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \,]\,0\,;+\infty\,[^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$$

• Pour $x > 0$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[,\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• **Hypothèses de domination :** Soit $[\,a\,;b\,] \subset \,]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;b\,] \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) = |\ln t| \left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)\mathrm{e}^{-t}$$

Soit $\alpha \in \,]\,0\,;a\,[$. On a

$$t^{1-\alpha}\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} |\ln t|\, t^{a-\alpha} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \iff \varphi(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{1-\alpha}}\right) \quad \text{et} \quad \varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction φ est intégrable et par conséquent, la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $]\,0\,;+\infty\,[$ donc

$$\boxed{\Gamma \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[,\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall x>0 \qquad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

4. On pose $v_n = \mathrm{H}_n - \mathrm{H}_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$. On a

$$v_n = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ d'après le critère de Riemann et comme c'est une série téléscopique, sa convergence équivaut à celle de la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\geqslant 1}$ d'où

$$\boxed{\exists\gamma\in\mathbb{R}\quad\mid\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\gamma}$$

5.(a) La fonction $x\mapsto\ln(1-x)$ est concave sur $]-\infty\,;1[$. En effet, elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\infty\,;1[$ et de dérivée seconde $x\mapsto-\dfrac{1}{(1-x)^2}$ négative. Le graphe de cette fonction est donc sous la tangente en zéro d'où

$$\boxed{\forall x<1\qquad\ln(1-x)\leqslant-x}$$

Soit n entier non nul et $x>0$. L'inégalité pour $t>n$ est immédiate. Soit $t\in\,]0\,;n]$. D'après l'inégalité précédente, il vient

$$\forall t\in\,]0\,;n]\qquad f_n(t)=\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1}\leqslant\mathrm{e}^{-n\frac{t}{n}}t^{x-1}$$

Ainsi $$\boxed{\forall(n,x,t)\in\mathbb{N}^*\times\,]0\,;+\infty[^2\qquad 0\leqslant f_n(t)\leqslant\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}}$$

5.(b) Soit $x>0$ et $t>0$. Pour n assez grand, on a $t\in\,]0\,;n]$. Avec le développement usuel $\ln(1-u)\underset{u\to0}{=}-u+\mathrm{o}(u)$, on trouve

$$f_n(t)=\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1}=\mathrm{e}^{-t+\mathrm{o}(1)}t^{x-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$$

La question précédente nous fournit une domination dont on sait l'intégrabilité puisqu'il s'agit de l'intégrande de Γ. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\forall x>0\qquad\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to\infty]{}\Gamma(x)}$$

6.(a) Soit n entier et $x>0$ On a $u\mapsto(1-u)^n u^{x-1}\in\mathscr{C}_{pm}(]0\,;1]\,,\mathbb{R})$. On a

$$(1-u)^n u^{x-1}\underset{u\to0}{\sim}\frac{1}{u^{1-x}}\quad\text{avec}\quad 1-x<1$$

Par comparaison et critère de Riemann, on obtient

$$\boxed{\text{La fonction } u\mapsto(1-u)^n\,u^{x-1}\text{ est intégrable sur }]0\,;1].}$$

On suppose que n est un entier non nul. Les fonctions $u\mapsto(1-u)^n$ et $u\mapsto u^x/x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;1]$ avec

$$(1-u)^n\frac{u^x}{x}\xrightarrow[u\to0]{}0\quad\text{et}\quad(1-u)^n\frac{u^x}{x}\xrightarrow[u\to1]{}0$$

Le crochet admettant des limites finies, les intégrales $\displaystyle\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^1\frac{-n}{x}(1-u)^{n-1}u^x\,\mathrm{d}u$ sont de même nature donc convergentes et on a

$$\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u=\left[(1-u)^n\frac{u^x}{x}\right]_0^1+\frac{n}{x}\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u$$

Autrement dit $$\boxed{\forall(n,x)\in\mathbb{N}^*\times\,]0\,;+\infty[\qquad\mathrm{I}_n(x)=\frac{n}{x}\mathrm{I}_{n-1}(x+1)}$$

6.(b) On sans difficulté que $\mathrm{I}_n(x)>0$ pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}\times]0\,;+\infty[$ par séparation de l'intégrale. Par suite, on obtient

$$\begin{aligned}\forall(n,x)\in\mathbb{N}\times\,]0\,;+\infty[\qquad\mathrm{I}_n(x)&=\mathrm{I}_0(x+n)\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{I}_k(x+n-k)}{\mathrm{I}_{k-1}(x+n-(k-1))}\right]\\&=\int_0^1 u^{n+x-1}\,\mathrm{d}u\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{x+n-k}\end{aligned}$$

On reconnaît une factorielle au numérateur et en changeant l'ordre du produit au dénominateur, on conclut

$$\boxed{\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \left]\, 0\,;+\infty\, \right[\qquad \mathrm{I}_n(x) = \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}}$$

6.(c) Soit n entier non nul. Avec le changement de variable $t = nu$, on obtient

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \,\mathrm{d}t = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} \,\mathrm{d}u = n^x \mathrm{I}_n(x)$$

Avec les résultats des questions 6.(b) et 5.(b), on conclut

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad n^x \mathrm{I}_n(x) = \frac{n! n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(x)}$$

7. Soit n entier non nul et $x > 0$. Par propriété de l'exponentielle et du logarithme, il vient

$$\mathrm{e}^{x\mathrm{H}_n} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right] = \mathrm{e}^{x\mathrm{H}_n - x\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) = \mathrm{e}^{-x\ln(n)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \left]\, 0\,;+\infty\, \right[\qquad \frac{1}{n^x} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) = \mathrm{e}^{x\mathrm{H}_n} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right]}$$

Soit n entier non nul et $x > 0$. D'après ce qui précède, on a

$$\prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right] = \frac{\mathrm{e}^{-x\mathrm{H}_n}}{n^x} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

d'où
$$x\mathrm{e}^{\gamma x} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right] = \frac{\mathrm{e}^{x(\gamma - \mathrm{H}_n)}}{n^x} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (k+x)}{n!}$$

Avec le résultat de la question 6.(c) et le fait que $\gamma - \mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on conclut

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad x\mathrm{e}^{\gamma x} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\Gamma(x)}}$$

8.(a) Soit n entier non nul et $x > 0$. On a

$$\ln\left(x\mathrm{e}^{\gamma x} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right]\right) = \ln(x) + \gamma x + \sum_{k=1}^{n} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$$

D'après la convergence établie précédemment et la continuité de ln en $\Gamma(x) > 0$, on conclut que

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k\geqslant 1} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right] \text{ converge simplement sur } \left]\, 0\,;+\infty\, \right[.}$$

Remarque : On pouvait tout à fait éviter le recours à la question précédente, par exemple en écrivant un développement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre deux.

8.(b) On pose $\qquad \forall (k,x) \in \mathbb{N}^* \times \left]\, 0\,;+\infty\, \right[\qquad u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{k}\right) - \dfrac{x}{k}$

La série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par théorèmes généraux et qui converge simplement d'après le résultat de la question précédente. Par dérivation, on obtient

$$\forall (k,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_k'(x) = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k}$$

Soit $[\,a\,;b\,] \subset]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$\forall (k,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,a\,;b\,] \qquad |u_k'(x)| = \frac{x}{(x+k)k} \leqslant \frac{b}{(a+k)k}$$

d'où
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \|u_k'\|_{\infty,[\,a\,;b\,]} \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Ainsi, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k'$ converge uniformément sur tout segment. Par théorème, on obtient

$$\boxed{g \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k+x} - \frac{1}{x}\right]}$$

8.(c) D'après le calcul effectué à la question 8.(a), on a

$$\forall x > 0 \qquad -\ln\Gamma(x) = \ln(x) + \gamma x + g(x)$$

La fonction $\ln\circ\Gamma$ est dérivable comme composée de telles fonctions avec $\operatorname{Im}\Gamma \subset]\,0\,;+\infty\,[$ et par dérivation, on obtient

$$\forall x > 0 \qquad -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma + g'(x)$$

Soit
$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \Psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)}$$

9. On a
$$\Psi(1) = -1 - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = -1 - \gamma + 1$$

puisque la somme est téléscopique. Comme $\Gamma(1) = 1$ (calcul archi-classique), on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t = \Gamma'(1) = \Psi(1) = -\gamma}$$

Problème II

1. Soit p et n entiers. Choisir une application de $[\![\,1\,;\,p\,]\!]$ dans $[\![\,1\,;\,n\,]\!]$ équivaut à choisir la taille de l'ensemble image, c'est-à-dire un entier $k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$, puis les k éléments de l'image avec $\binom{n}{k}$ façons de faire ce choix et une surjection de $[\![\,1\,;\,p\,]\!]$ sur cet ensemble. Notant $\mathscr{S}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ les surjections de E sur F, on a

$$[\![\,1\,;\,n\,]\!]^{[\![\,1\,;\,p\,]\!]} = \bigsqcup_{k=0}^{n} \ \bigsqcup_{\mathrm{Y}\subset[\![\,1\,;\,n\,]\!],\mathrm{Card}\ \mathrm{Y}=k} \underbrace{\mathscr{S}([\![\,1\,;\,p\,]\!],\mathrm{Y})}_{\mathrm{Card}\,=\mathrm{S}_{p,k}}$$

Ainsi
$$\boxed{n^p = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{S}_{p,k}}$$

Remarque : La formule est valide si p et/ou n nuls.

2. Soit p entier. On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \dfrac{\mathrm{S}_{p,n}}{n!} \leqslant \dfrac{n^p}{n!}$

et la série entière $\sum \dfrac{n^p}{n!} z^n$ a même rayon de convergence que $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ à savoir $+\infty$. On en déduit $\mathrm{R} \geqslant +\infty$ autrement dit

$$\boxed{\mathrm{R} = +\infty}$$

Variante : On peut aussi observer tout simplement $\mathrm{S}_{p,n} = 0$ pour tout $n > p$ ce qui garantit que la suite $\left(\dfrac{\mathrm{S}_{p,n}}{n!} r^n\right)_n$ est bornée pour tout $r \geqslant 0$.

3. On a $$\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \frac{n^p}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{S}_{p,k}}{k!} \frac{1}{(n-k)!}$$

Soit p entier. Les séries entières $\sum \dfrac{\mathrm{S}_{p,n}}{n!} z^n$ et $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ ont chacune un rayon de convergence $+\infty$ et d'après le théorème du produit de Cauchy pour des séries entières

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!} z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{S}_{p,n}}{n!} z^n\right) \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)}_{=\mathrm{e}^{z}}$$

On en déduit en particulier, toujours d'après le théorème du produit de Cauchy

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{S}_{p,n}}{n!} x^n &= \mathrm{e}^{-x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!} x^n\right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k^p (-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\right) x^n \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{\mathrm{S}_{p,n}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^p (-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

Et on conclut $$\boxed{\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathrm{S}_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p}$$

Problème III (bonus)

1. Montrons l'égalité suggérée en préambule. Soit N entier et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On a

$$\mathrm{S}_{\mathrm{N}}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{x+n} + \sum_{n=-\mathrm{N}}^{-1} \frac{1}{x+n}$$

avec un changement d'indice dans la dernière somme, on trouve

$$\mathrm{S}_{\mathrm{N}}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

On a $$\frac{2x}{x^2 - n^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{2x}{x^2 - n^2}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (\mathrm{S_N})_\mathrm{N} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}.}$$

2. Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$. On a

$$\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad |x| \leqslant |a| + |b|$$

Ainsi $$\forall n \geqslant |a| + |b| \qquad \forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad \left|\frac{2x}{x^2-n^2}\right| \leqslant \frac{2(|a|+|b|)}{n^2-(|a|+|b|)^2}$$

On en déduit la convergence normale sur tout segment et par conséquent

$$\boxed{\text{La série définissant S converge uniformément sur tout segment de } \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}.}$$

3. On a $$\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$$

La fonction S est somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment de $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ d'où la continuité de S sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$. L'expression de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ montre que S est clairement impaire. Enfin, pour $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$, on a

$$\mathrm{S_N}(x+1) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \frac{1}{x+1+n} = \mathrm{S_N}(x) + \frac{1}{x+\mathrm{N}+1} - \frac{1}{x-\mathrm{N}} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \mathrm{S}(x)$$

et $$\mathrm{S_N}(x+1) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \mathrm{S}(x+1)$$

Ainsi $$\boxed{\text{La fonction S est continue sur } \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}, \text{ impaire et 1-périodique.}}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ et N entier. On a

$$\mathrm{S_N}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \frac{2}{x+2n} \quad \text{et} \quad \mathrm{S_N}\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \frac{2}{x+2n+1}$$

On remarque, en distinguant les termes d'indices pairs et impairs, qu'on a

$$\mathrm{S_N}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{S_N}\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{n=-2\mathrm{N}}^{2\mathrm{N}} \frac{2}{x+n} + \frac{2}{x+2\mathrm{N}+1} = 2\mathrm{S_{2N}}(x) + \frac{2}{x+2\mathrm{N}+1}$$

Faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{S}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\mathrm{S}(x)}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$. On a

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right) = 2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = 2\operatorname{cotan}(\pi x)$$

Par suite $$\boxed{\text{La fonction } f \text{ vérifie la relation fonctionnelle de la fonction S.}}$$

6. On a $$\mathrm{S}(x) - \frac{1}{x} = 2x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2-n^2}$$

On montre sans difficulté que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2-n^2}$ est continue sur un voisinage de zéro et par conséquent

$$\mathrm{S}(x) = \frac{1}{x} + \mathrm{o}(1)$$

Puis, avec les développements usuels, il vient

$$\pi \operatorname{cotan}(\pi x) = \pi \frac{1 + \mathrm{o}(1)}{\pi x + \mathrm{o}(x)} = \frac{1}{x} + \mathrm{o}(1)$$

D'où
$$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Par 1-périodicité, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x \to k]{} 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, la fonction f peut se prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$. Soit $\widetilde{f}$ son prolongement sur $[\,0\,;1\,]$, $\alpha \in [\,0\,;1\,]$ tel que $\widetilde{f}(\alpha) = \underset{[\,0\,;1\,]}{\operatorname{Max}} \widetilde{f}$ et $\beta \in [\,0\,;1\,]$ tel que $\widetilde{f}(\beta) = \underset{[\,0\,;1\,]}{\operatorname{Min}} \widetilde{f}$. On trouve

$$2\widetilde{f}(\alpha) = \widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \widetilde{f}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \widetilde{f}(\alpha)\ , \quad \widetilde{f}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \leqslant \widetilde{f}(\alpha)$$

On en déduit notamment
$$\widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \widetilde{f}(\alpha)$$

Une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \widetilde{f}(\alpha) = \widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

et par continuité de $\widetilde{f}$
$$\widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \widetilde{f}(0) = 0$$

On en déduit $\widetilde{f}(\alpha) = 0$. En appliquant le même raisonnement à $-f$, on obtient $\widetilde{f}(\beta) = 0$ d'où la nullité de $\widetilde{f}$ sur $[\,0\,;1\,]$ et donc sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité. On conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x)}$$

7. On pose
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;1\,[\qquad u_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

Pour $x \in \,]\,0\,;1\,[$, on a $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;1\,[\qquad u_n'(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

On a établi précédemment que $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]\,0\,;1\,[$. Par conséquent, la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;1\,[$ avec $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'$. On pose

$$\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad g(x) = \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

Par dérivation, il vient

$$\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad g'(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \pi \operatorname{cotan}(\pi x)$$

Par intégration, on obtient

$$\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad g(x) = \ln(\sin(\pi x)) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

autrement dit
$$\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \qquad (*)$$

Puis, pour $a \in \,]\,0\,;1\,[$, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;a\,] \qquad |u_n(x)| \leqslant \frac{x^2}{n^2} \leqslant \frac{a^2}{n^2}$$

d'où la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $[\,0\,;a\,]$.

La somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est donc continue sur $[\,0\,;a\,]$, nulle en zéro et faisant tendre $x \to 0$ dans l'égalité $(*)$, il vient $\mathrm{C^{te}} = \ln(\pi)$. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right) = \ln(\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)}$$

8. Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$. On a

$$\ln(\pi) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)$$

d'où, par continuité de l'exponentielle

$$\pi \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sin(\pi x)}{x}$$

On conclut $$\boxed{\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)}$$

L'égalité vaut aussi clairement pour $x = 0$.

9. Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$. On a

$$\frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}{n!n^x} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (1-x+k)}{n!n^{1-x}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}$$

Puis

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n} (x+k) \prod_{k=0}^{n} (1-x+k) &= x(n+1-x) \prod_{k=1}^{n} (x+k) \prod_{k=0}^{n-1} (1-x) \\
&= x(n+1-x) \prod_{k=1}^{n} [(k+x)(k-x)] \\
&= x(n+1-x) \prod_{k=1}^{n} (k^2-x^2) = x(n+1-x)(n!)^2 \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)
\end{aligned}$$

d'où $$\frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}{n!n^x} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (1-x+k)}{n!n^{1-x}} = \frac{n+1-x}{n} x \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$$

Par unicité de la limite, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}}$$