Commentaires - Devoir surveillé n°4

Le sujet est l'épreuve de 2023 de mathématiques 2 de la filière MP du concours Mines-Ponts. Certains thèmes abordés sont très classiques (somme trigonométrique, lemme de Riemann-Lebesgue, relation de Wallis, ...) et d'autres beaucoup moins avec des niveaux de technicité très élevés. La dernière partie est une déclinaison de la démarche mise en œuvre dans le *théorème de Bohr-Mollerup* (caractérisation de la fonction Γ avec entre autre son équation fonctionnelle et la log-convexité). C'est un sujet très intéressant, long, ambitieux mais pas très graduel avec assez peu de questions faciles.

Remarques générales : Sur un sujet technique comme celui proposé, il est impératif d'avoir une certaine aisance et persévérance calculatoire puisque, dès la deuxième question, il y a des calculs pas complètement triviaux à effectuer. Pour progresser dans cette voie, il est indispensable d'avoir une pratique régulière du calcul (rythme théoriquement imposé par les tests des lundis matins). Quelques résultats pouvaient être montrés par récurrence dont on attend évidemment le détail, les formules du type « par récurrence immédiate » dans des copies parfois peu conséquentes n'ayant pas d'autres effets que d'agacer le correcteur.

Calcul de $\sigma(1)$

1. Question moyennement réussie. Les valeurs 1 et -1 sont parfois oubliées et le domaine $\mathbb{R} \setminus [-1\,;1]$ l'est quasi-systématiquement. La rédaction de continuité est très souvent incomplète avec notamment l'omission du fait que la série de fonctions définissant σ est une série de fonctions continues sur $[-1\,;1]$. La convergence uniforme est facilement garantie par la convergence normale sur $[-1\,;1]$. Rédaction à revoir pour un grand nombre.

2. Réussite mitigée. La question est en fait composée de deux questions qui sont chacune des questions calculatoires pas complètement immédiates. Il faut s'entrainer très régulièrement à être concentré et mobilisé pour mener à terme de tels calculs sans erreur.

3. Question composée de deux questions, globalement peu réussie. La première question est le lemme de Riemann-Lebesgue, un classique, que certains échouent malgré tout à redémontrer. La deuxième partie est l'utilisation non triviale du lemme avec un choix de fonction φ à faire et surtout une vérification délicate du caractère $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$ avec le recours au théorème de limite de la dérivée.

Équivalents

4. Le domaine de définition a été très mal traité bien qu'il soit implicitement suggéré par la suite du sujet avec la définition de l'intervalle I. La relation de Wallis est un classique que certains échouent malgré tout à redémontrer.

5. Question technique avec la nécessité de recourir à une domination locale non triviale. Très peu réussie.

6. Question facile mais il faut mentionner la continuité de f pour le passage à la limite. Assez bien réussie.

7. Question plutôt classique mais pas très bien réussie avec beaucoup d'arnaques comme $f(n+1) \sim f(n)$ qui ne va absolument pas de soi (par exemple $\mathrm{e}^{n+1} \nsim \mathrm{e}^{n}$). Le passage d'un équivalent en n discret à un équivalent en x continue demande évidemment un effort de rédaction.

8. Question anecdotique.

Développement en série entière

9. Réussite mitigée. L'égalité sur D_1 donne lieu à des rédactions invraisemblablement lourdes alors que c'est immédiat.

10. Question très technique qui requiert beaucoup d'initiatives. Partiellement traitée dans quelques copies seulement.

11. Très peu réussie. La première égalité est simple à établir (mais pose déjà problème à un grand nombre). L'équivalent qui suit est très difficile à obtenir.

12. Abordée sérieusement dans aucune copie alors qu'une intégration terme à terme fournit le résultat.

Convergence de suite de fonctions

13. Peu réussie. La régularité $\mathscr{C}^1$ est facile à établir mais l'égalité qui suit demande des efforts et de la persévérance. On peut évidemment exploiter le résultat pour montrer cette égalité ce qui rend les choses plus commodes.

14. Peu réussie. Une majorité de ceux qui ont traité la question ont cherché à intégrer terme à terme. Mais on pouvait également considérer le résultat fourni dans l'énoncé et dériver terme à terme (avec justification évidemment).

15. Très peu réussie avec une difficulté accrue par rapport à la question précédente avec la gestion du carré d'une somme infinie.

16. Question à peine abordée alors qu'elle est pourtant moins difficile que les questions 14, 15.

Convexité logarithmique

17. Très peu abordée, réussie dans une seule copie. La démarche est pourtant identique à celle exposée en cours pour la fonction Γ.

18. Question assez facile, plutôt bien réussie par ceux qui l'abordent. Les « par récurrence immédiate » raisonnent un peu comme un gâchis de points ...

19. C'est l'inégalité des pentes ! Réussie dans une seule copie.

20, 21. Plus aucun point accordé sur ces questions.