ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 19/12/2024

Commentaires - Devoir en temps libre n°9

Remarques générales : L'utilisation de la valeur absolue pose problème à beaucoup. Dans ce devoir, il fallait l'employer notamment pour les dominations et pour montrer de la convergence normale. La fonction valeur absolue n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$! Il est impératif (et il n'est pas encore trop tard) pour se familiariser vraiment à son usage.

Problème I

1. Il faut mentionner la continuité par morceaux de l'intégrande et ne pas oublier l'étude en 0 puisqu'on peut avoir $x-1<0$ pour $x \in]\,0\,;1\,[$.

2. On attend continuité et positivité de l'intégrande. Sans mention de la continuité, aucun point n'est accordé.

3. Attention à la notation de dérivée partielle. On écrit

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ldots$$

Des dominations farfelues dans certaines copies alors que la fonction Γ a été exposée en détail dans le tout premier chapitre de l'année. En cas de doute, il faut rouvrir son cours pour vérifier la consistance de sa rédaction. Enfin, il est bienvenu de conclure $\mathscr{C}^1$ sur tout segment donc $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ pour souligner le caractère local de la régularité $\mathscr{C}^1$.

4. OK pour la plupart mais certains oublient quand même de mentionner la nature téléscopique de la série et quelques rares se trompent dans le développement limité, ce qui est inacceptable tant c'est un classique.

5.(a) Si l'on mentionne la concavité de ln, le détail peut être omis mais pour la fonction $x \in]+\infty\,;1\,[\mapsto \ln(1-x)$ qui est une composée, une rédaction sommaire est attendue. L'encadrement qui suit en est une conséquence directe mais il faut prendre soin de distinguer $t \in [\,0\,;n\,[$ et $t \geqslant n$ avec n entier non nul.

5.(b) La convergence simple, même si elle ne présente aucune difficulté, doit impérativement être rédigée et la mention du « théorème de convergence dominée » n'est pas un luxe. Le lien avec la suite de fonctions $(f_n)_n$ est également attendu avec

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(x)$$

6.(a) L'intégrale définissant $\mathrm{I}_n(x)$ avec n entier et $x>0$ est impropre en 0 car on peut avoir $x-1<0$ avec $x \in]\,0\,;1\,[$. Pour l'intégration par parties, il est donc attendu une justification sur la finitude du crochet pour justifier les intégrales de même nature donc convergentes et l'égalité attendue.

6.(b) OK.

6.(c) OK.

7. La première égalité a été bien traitée. La « mutation » de $\mathrm{e}^{x\mathrm{H}_n}$ en $\mathrm{e}^{x\gamma}$ avec $x > 0$ et n entier non nul a souvent été mise sous le tapis ...

8.(a) La continuité de ln en $\Gamma(x) > 0$ est trop souvent omise.

8.(b) Question peu réussie avec beaucoup de lourdeur chez ceux qui s'y essaient. Il s'agit d'établir le caractère $\mathscr{C}^1$ d'une somme de série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ avec les u_k de classe $\mathscr{C}^1$. La série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ converge simplement sur $]\,0\,;+\infty\,[$ puis on doit établir la convergence uniforme sur tout segment de $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k'$ et pour cela, on essaie toujours de montrer <u>en premier lieu la convergence normale</u> et seulement si cette démarche échoue, on se rabat sur la convergence uniforme. La convergence normale sur tout segment $[\,a\,;b\,] \subset\,]\,0\,;+\infty\,[$ s'obtient sans difficulté en majorant $\|u_k'\|_{\infty,[\,a\,;b\,]}$ (ceux qui calculent cette norme doivent le détailler). Enfin, ceux qui tentent la convergence uniforme n'ont la plupart du temps pas réalisé un contrôle uniforme du reste. À reprendre pour la plupart.

9. OK.

Problème II

1. Bien réussie dans l'ensemble. Quelques rédactions vraiment trop approximatives pour être convaincantes. L'exhibition d'unions disjointes pour établir une telle égalité entre cardinaux est l'approche la plus propre.

2. Peu réussie bien que la question soit très abordable.

3. Peu réussie. Il faut indiquer les rayons de convergence des séries entières concernées avant d'écrire la relation de produit de Cauchy. Des invocations très farfelues de l'unicité du développement en série entière. Comme son nom l'indique, il s'agit d'un résultat portant sur un développement en série entière et certainement pas d'une prétendue unicité de l'écriture d'une somme de série numérique obtenue après évaluation pour $z = 1$. À reprendre pour plusieurs.

Problème III (bonus)

Traitée dans une dizaine de copies.

1. Bien réussie.

2. Beaucoup de lourdeurs dans les rédactions du fait notamment d'un mauvais usage de la valeur absolue.

3, 4. Assez bien réussies, mauvaise gestion des termes pour certains pour établir la 1-périodicité et la relation fonctionnelle.

5. Bien traitée par ceux qui abordent la question.

6. Question très difficile que personne n'a parfaitement réussi.

7, 8, 9. Des points accordés dans seulement deux copies.