ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 06/01/2025

Corrigé du devoir en temps libre n°10

Problème I

1. On a clairement $\deg \pi_0 = \deg 1 = 0$. Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. L'étape itérative de l'algorithme consiste à construire

$$\mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle \mathrm{X}^k, \pi_j \rangle \pi_j \quad \text{et} \quad \pi_k = \frac{\mathrm{P}_k}{\|\mathrm{P}_k\|}$$

Comme $\mathrm{Vect}\,(1, \ldots, \mathrm{X}^{k-1}) = \mathrm{Vect}\,(\pi_0, \ldots, \pi_{k-1})$, il s'ensuit que

$$\deg \mathrm{P}_k = \deg \Bigg(\mathrm{X}^k - \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \langle \mathrm{X}^k, \pi_j \rangle \pi_j}_{\in \mathbb{R}_{k-1}[\mathrm{X}]} \Bigg) = k \quad \text{et} \quad \deg \pi_k = \deg \mathrm{P}_k$$

On conclut $\boxed{\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \deg \pi_k = k}$

2. On a $1 = \sqrt{2}\pi_0$ d'où $\displaystyle\int_{-1}^{1} \pi_j(t)\,\mathrm{d}t = \langle 1, \pi_j \rangle = \sqrt{2}\langle \pi_0, \pi_j \rangle = 0$

Supposons que π_j n'ait pas de racine d'ordre impair dans $]\,-1\,;1\,[$. Cela signifierait que π_j est de signe constant sur $[\,-1\,;1\,]$ d'après le théorème de valeurs intermédiaires appliqué à $t \mapsto \pi_j(t)$ continue, les seules racines éventuelles étant d'ordre pair. En effet, soit α racine de π_j sur $]\,-1\,;1\,[$ d'ordre $2p$ avec p entier. On aurait $\pi_j(t) = (t-\alpha)^{2p}\mathrm{Q}(t)$ avec $\mathrm{Q}(\alpha) \neq 0$ et cette expression de π_j montre qu'il s'annule en α sans changer de signe. Comme $t \mapsto \pi_j(t)$ est continue, la propriété de séparation de l'intégrale donnerait alors $\pi_j(t) = 0$ pour tout $t \in [\,-1\,;1\,]$ d'où $\pi_j = 0_{\mathrm{E}}$ (infinité de racines) ce qui absurde puisque $\deg \pi_j = j \geqslant 1$. Par conséquent

$$\boxed{\text{Le polynôme } \pi_j \text{ a au moins une racine d'ordre impair dans }]\,-1\,;1\,[.}$$

3. On a $m \leqslant j$ puisque π_j admet moins de racines distinctes et *a fortiori* moins de racines distinctes d'ordre impair que son degré. Supposons $m < j$. On a alors

$$\mathrm{S} \in \mathbb{R}_m[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}\,(1, \ldots, \mathrm{X}^m) = \mathrm{Vect}\,(\pi_0, \ldots, \pi_m) \quad \text{et} \quad \pi_j \in \mathrm{Vect}\,(\pi_0, \ldots, \pi_m)^{\perp}$$

Par suite $\displaystyle\int_{-1}^{1} \pi_j(t)\mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t = \langle \pi_j, \mathrm{S} \rangle = 0$

Mais le polynôme $\pi_j \times \mathrm{S}$ n'admet que des racines d'ordre pair sur $]\,-1\,;1\,[$ et il est donc de signe constant sur $[\,-1\,;1\,]$, ce qui, par propriété de séparation de l'intégrale, entraîne que $\pi_j(t)\mathrm{S}(t) = 0$ pour tout $t \in [\,-1\,;1\,]$ d'où $\pi_j \times \mathrm{S} = 0$ ce qui est absurde puisque $\pi_j \neq 0_{\mathrm{E}}$ et $\mathrm{S} \neq 0_{\mathrm{E}}$ (puisque $m \geqslant 1$). Par conséquent, il en résulte que

$$\boxed{\text{On a l'égalité } m = j.}$$

Ainsi, on a $\mathrm{S} | \pi_j$ et $\deg \mathrm{S} = \deg \pi_j$ ce qui prouve que les deux polynômes sont associés et on conclut

$$\boxed{\text{Le polynôme } \pi_j \text{ admet exactement } j \text{ racines distinctes dans }]\,-1\,;1\,[.}$$

Problème II

1. Pour $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, il vient $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle + \langle \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p}, \underbrace{y - p(y)}_{\in \mathrm{Ker}\, p}\rangle$

Comme p est un projecteur orthogonal, on Im $p \perp$ Ker p et on conclut

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle}$$

2. Supposons p orthogonal. D'après ce qui précède, on a

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle p(x), x\rangle = \|p(x)\|^2 \geqslant 0$$

Réciproquement, Soit $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{Ker}\, p$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \langle p(x+ty), x+ty\rangle = \langle p(x), x+ty\rangle = \langle p(x), x\rangle + t\,\langle p(x), y\rangle \geqslant 0$$

La fonction affine $t \mapsto \langle p(x), x\rangle + t\,\langle p(x), y\rangle$ est positive ce qui impose $\langle p(x), y\rangle = 0$. Ainsi, on a Im $p \perp$ Ker p. On conclut

$$\boxed{p \text{ orthogonal} \iff \forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle p(x), x\rangle \geqslant 0}$$

3. Pour r projecteur orthogonal et $x \in \mathrm{E}$, on a d'après le théorème de Pythagore

$$\|r(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|(\mathrm{id} - r)(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$$

d'où
$$\|p \circ q(x)\| = \|p(q(x))\| \leqslant \|q(x)\| \leqslant \|x\|$$

Soit λ valeur propre de $p \circ q$ et x vecteur propre associé. On a

$$|\lambda|\,\|x\| = \|p \circ q(x)\| \leqslant \|x\|$$

avec $\|x\| > 0$ d'où $|\lambda| \leqslant 1$. Supposons $\lambda \neq 0$ sinon il n'y a rien à faire. Il vient en exploitant la relation établie dans la première question avec p puis q

$$\lambda^2 \|x\|^2 = \langle p \circ q(x), p \circ q(x)\rangle = \langle p \circ q(x), q(x)\rangle = \lambda\,\langle x, q(x)\rangle$$

d'où $\lambda \|x\|^2 = \langle x, q(x)\rangle$ et comme on a $\|x\|^2 > 0$, il s'ensuit $\lambda \geqslant 0$. On conclut

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } p \circ q \text{ sont dans } [\,0\,;1\,].}$$

Problème III

1. Pour $\mathrm{U} = \big(u_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $\mathrm{V} = \big(v_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans E, on trouve $\langle \mathrm{U}, \mathrm{V}\rangle = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} u_{i,j} v_{i,j}$. On vérifie alors de manière immédiate qu'il s'agit d'une forme symétrique, linéaire en la première variable, définie positive. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } (\mathrm{U}, \mathrm{V}) \in \mathrm{E}^2 \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{U}^\top \mathrm{V}) \text{ est un produit scalaire sur E.}}$$

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{Ker}\, \mathrm{T_A}$. On a $\mathrm{AM} = \mathrm{MA}$ et par commutation, il vient $(\mathrm{AM})^n = \mathrm{A}^n \mathrm{M}^n = 0$ d'où AM nilpotente et donc semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Par conséquent, on a $\big\langle \mathrm{A}^\top, \mathrm{M}\big\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = 0$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, \mathrm{T_A} \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}^\top)^\perp}$$

3. On a en utilisant la propriété fondamentale de la trace

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U} \in (\mathrm{Im}\ \mathrm{T_A})^\perp &\iff \forall \mathrm{V} \in \mathrm{E} \qquad \langle \mathrm{U}, \mathrm{AV} - \mathrm{VA} \rangle = 0 \\
&\iff \forall \mathrm{V} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{U}^\top \mathrm{AV}) - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{U}^\top \mathrm{VA}) = 0 \\
&\iff \forall \mathrm{V} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{U}^\top \mathrm{AV}) - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AU}^\top \mathrm{V}) = 0 \\
&\iff \forall \mathrm{V} \in \mathrm{E} \qquad \left\langle \left(\mathrm{U}^\top \mathrm{A} - \mathrm{AU}^\top\right)^\top, \mathrm{V} \right\rangle = 0 \\
\mathrm{U} \in (\mathrm{Im}\ \mathrm{T_A})^\perp &\iff \mathrm{U}^\top \mathrm{A} - \mathrm{AU}^\top = 0
\end{aligned}
$$

On conclut $$\boxed{(\mathrm{Im}\ \mathrm{T_A})^\perp = \mathrm{Ker}\ \mathrm{T}_{\mathrm{A}^\top}}$$

4. L'espace E étant euclidien, pour tout sev F de E, on a $(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}$. D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{T_A} = \left((\mathrm{Im}\ \mathrm{T_A})^\perp\right)^\perp = (\mathrm{Ker}\ \mathrm{T}_{\mathrm{A}^\top})^\perp$$

On suppose A nilpotente. Sa transposée l'est aussi et d'après le résultat de la première question, on obtient $\mathrm{Ker}\ \mathrm{T}_{\mathrm{A}^\top} \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A})^\perp$. Par conséquent

$$\mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}) = \left(\mathrm{Vect}\,(\mathrm{A})^\perp\right)^\perp \subset (\mathrm{Ker}\ \mathrm{T}_{\mathrm{A}^\top})^\perp = \mathrm{Im}\ \mathrm{T_A}$$

Réciproquement, soit $\mathrm{B} \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{T_A}(\mathrm{B})$. On a $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{A}$ d'où $\mathrm{A}^2\mathrm{B} - \mathrm{ABA} = \mathrm{A}^2$ puis $\mathrm{A}^2\mathrm{B} - (\mathrm{BA} + \mathrm{A})\mathrm{A} = \mathrm{A}^2$ d'où $\mathrm{A}^2\mathrm{B} - \mathrm{BA}^2 = 2\mathrm{A}^2$. On peut conjecturer $\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{BA}^k = k\mathrm{A}^k$ pour k entier. On procède par récurrence. La propriété est vraie pour $k = 0$ puis on la suppose vraie pour k entier. Il vient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{BA}^k) = k\mathrm{A}^{k+1} &\Longrightarrow \mathrm{A}^{k+1}\mathrm{B} - (\mathrm{BA} + \mathrm{A})\mathrm{A}^k = k\mathrm{A}^{k+1} \\
&\Longrightarrow \mathrm{A}^{k+1}\mathrm{B} - \mathrm{BA}^{k+1} = (k+1)\mathrm{A}^{k+1}
\end{aligned}
$$

ce qui clôt la récurrence. On a établi

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad -\mathrm{T_B}(\mathrm{A}^k) = k\mathrm{A}^k$$

Si A^k est non nulle pour tout k entier, l'endomorphisme $-\mathrm{T_B}$ admet une infinité de valeurs propres distinctes ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{A nilpotente si et seulement si } \mathrm{A} \in \mathrm{Im}\ \mathrm{T_A}}$$