ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°57

Exercice 1 (**)

Soit a vecteur unitaire d'un espace euclidien E, α un réel et f_α définie par

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, a\rangle a$$

1. Justifier que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer que $f_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \alpha \neq -1$. Décrire f_{-1}.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour avoir $f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Quand la condition est réalisée, décrire f_α.

Corrigé : 1. L'application f_α est clairement à valeurs dans E, linéaire par linéarité du produit scalaire en la première variable. Ainsi

$$\boxed{f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. On complète la famille (a) en $\mathscr{B}$ base orthonormée de E. Par suite, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f_\alpha = \mathrm{diag}(1+\alpha, 1, \ldots, 1)$. On en déduit $\det f_\alpha = 1 + \alpha$ et

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f_{-1}(x) = x - \langle x, a\rangle a = (\mathrm{id} - p_{\mathrm{Vect}\,(a)})(x) = p_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}(x)$$

Ainsi $$\boxed{f_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \alpha \neq -1 \quad \text{et} \quad f_{-1} = p_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}}$$

3. On a $$f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f_\alpha \in \mathcal{O}(n)$$

et clairement $$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f_\alpha \in \mathcal{O}(n) \iff (1+\alpha)^2 = 1 \iff \alpha \in \{0, -2\}$$

On conclut $$\boxed{f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff \alpha \in \{0, -2\} \quad \text{et} \quad f_0 = \mathrm{id}\,, \quad f_{-2} = s_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}}$$

Exercice 2 (**)

Déterminer l'intérieur de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : Munissons $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Soit $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(\mathrm{M}, r) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, on a $$\forall \varepsilon \in [\,0\,; r\,[\qquad (\mathrm{M} + \varepsilon \mathrm{I}_n)^\top (\mathrm{M} + \varepsilon \mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n$$

d'où $$\forall \varepsilon \in [\,0\,; r\,[\qquad \mathrm{M}^\top + \mathrm{M} = \varepsilon \mathrm{I}_n$$

ce qui est absurde. On en déduit

$$\boxed{\text{L'intérieur de } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est vide.}}$$

Remarque : On peut aussi observer, en munissant $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{S}(0, \sqrt{n})$ et comme une sphère est d'intérieur vide, il s'ensuit que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ également.

Exercice 3 (**)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul et $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée de E, déterminer f.
3. On suppose $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$.
   (a) Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.
   (b) Pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, calculer $\langle f(u_i), u_i \rangle$ et en déduire que $\|u_i\| \in \left]\, 0\,; 1 \right]$.
   (c) Pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, en considérant $x \in \mathrm{Vect}\,\left((u_k)_{k \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{i\}}\right)^{\perp} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$, montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée.

Corrigé : 1. Immédiat.

2. On trouve

$$\boxed{f = p_{\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)} = \mathrm{id}}$$

3.(a) On a

$$\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n) \subset \mathrm{E}$$

La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice et de cardinal $\dim \mathrm{E}$ d'où

$$\boxed{\text{La famille } (u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base de E.}}$$

3.(b) Soit $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. On a

$$\langle f(u_i), u_i \rangle = \|u_i\|^4 + \sum_{k \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{i\}} \langle u_k, u_i \rangle^2$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle f(u_i), u_i \rangle \leqslant \|f(u_i)\| \|u_i\| = \|u_i\|^2$$

Ainsi

$$\|u_i\|^4 \leqslant \|u_i\|^2$$

D'où

$$\boxed{\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \|u_i\| \in \left]\, 0\,; 1 \right]}$$

3.(c) Soit $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ et $x \in \mathrm{Vect}\,\left((u_k)_{k \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{i\}}\right)^{\perp} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. Un tel choix est possible puisque

$$\dim \mathrm{Vect}\,\left((u_k)_{k \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{i\}}\right)^{\perp} = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{Vect}\,\left((u_k)_{k \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{i\}}\right) = 1$$

On a

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle\, u_k = \langle x, u_i \rangle\, u_i$$

Puis, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|x\| = \|f(x)\| \leqslant \|x\| \|u_i\|^2 \leqslant \|x\|$$

d'où $\|u_i\| = 1$ puis en reprenant l'inégalité de la question 3.(b)

$$\langle f(u_i), u_i \rangle = \|u_i\|^4 + \sum_{k \neq i} \langle u_k, u_i \rangle^2 \leqslant \|u_i\|^2 \iff \sum_{k \neq i} \langle u_k, u_i \rangle^2 = 0$$

On conclut

$$\boxed{\text{La famille } (u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base orthonormée.}}$$

Variante : Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut raisonner ainsi

$$\|x\| = \|f(x)\| = \|\, \langle x, u_i \rangle\, u_i\| \leqslant |\langle x, u_i \rangle|\, \|u_i\| \leqslant \|x\| \|u_i\|^2 \leqslant \|x\|$$

Les inégalités ci-dessus sont des égalités et d'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, il s'ensuit que $x \in \text{Vect}\,(u_i)$. On a donc

$$\text{Vect}\,\left((u_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i\}}\right)^\perp \subset \text{Vect}\,(u_i)$$

avec égalité des dimensions d'où

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \text{Vect}\,\left((u_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i\}}\right)^\perp = \text{Vect}\,(u_i)$$

d'où le caractère orthogonal de $(u_1,\ldots,u_n)$.

Exercice 4 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ vérifiant $\langle u(x), x\rangle = 0$. Décrire u.

Corrigé : Pour $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, on a $\langle u(x+y), x+y\rangle = 0$ d'où

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), y\rangle = -\langle u(y), x\rangle$$

Pour $\mathscr{L}$ base orthonormée de E, il s'ensuit que $\text{mat}_{\mathscr{L}} u$ est antisymétrique. Or, il existe $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E telle que $\text{mat}_{\mathscr{B}} u$ est diagonale par blocs formée de blocs (1), (-1) et $\mathrm{R}(\theta)$ avec θ réel. D'après le caractère antisymétrique et un éventuel réordonnancement de la base $\mathscr{B}$ pour avoir des angles positifs, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } \mathscr{B} \text{ base orthonormée de E telle que } \text{mat}_{\mathscr{B}} u = \text{diag}(\mathrm{R}(\pi/2),\ldots,\mathrm{R}(\pi/2)).}$$

Exercice 5 (***)

Calculer $\text{Card}\ \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

Corrigé : Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. On a

$$\forall j \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$$

Comme les coefficients sont entiers, on en déduit

$$\forall j \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \exists!\, i \in [\![1\,;\,n]\!] \quad | \quad a_{i,j} \in \{-1,1\}$$

On peut donc définir $\sigma : [\![1\,;\,n]\!] \to [\![1\,;\,n]\!]$ et $\varepsilon : [\![1\,;\,n]\!] \to \{-1,1\}$ telles que $\mathrm{A} = \left(\varepsilon(j)\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soit $(j,\ell) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ avec $j \neq \ell$. Supposons $\sigma(j) = \sigma(\ell)$. On a

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,\ell} = \varepsilon(j)\varepsilon(\ell) \in \{-1,1\}$$

Mais par orthogonalité de A $\qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,\ell} = 0$

ce qui contredit l'égalité précédente. On en déduit l'injectivité de σ et par conséquent σ est une permutation de $[\![1\,;\,n]\!]$. On a donc établi qu'il existe des applications uniques $\varepsilon \in [\![1\,;\,n]\!]^{\{-1,1\}}$ et $\sigma \in \mathrm{S}_n$ telles que

$$\mathrm{A} = \left(\varepsilon(j)\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

La réciproque est immédiate. Ainsi

$$\text{Card}\ \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) = \text{Card}\ \left([\![1\,;\,n]\!]^{\{-1,1\}} \times \mathrm{S}_n\right) = \text{Card}\,[\![1\,;\,n]\!]^{\{-1,1\}} \times \text{Card}\ \mathrm{S}_n$$

On conclut $\qquad \boxed{\text{Card}\ \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) = 2^n n!}$

Exercice 6 (***)

Soit E espace euclidien. Déterminer l'ensemble $\mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E}))$ des endomorphismes commutant avec toutes les isométries vectorielles de E.

Corrigé : Notons $\mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E}))$ l'ensemble des endomorphismes commutant avec tout élément de $\mathcal{O}(\mathrm{E})$. Soit $f \in \mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E}))$. Soit a vecteur non nul de E et $s_{\mathrm{Vect}\,(a)}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(a)$. On a $f \circ s_{\mathrm{Vect}\,(a)} = s_{\mathrm{Vect}\,(a)} \circ f$ et en particulier, en évaluant en a

$$f(a) = s_{\mathrm{Vect}\,(a)}(f(a))$$

D'où $f(a) = \lambda_a a$ avec λ_a un réel. Reste à montrer que λ_a ne dépend pas du choix de a. Soit $b \in \mathrm{E}$ tel que (a, b) libre. On a

$$\begin{aligned} f(a+b) = \lambda_{a+b}(a+b) = f(a) + f(b) = \lambda_a a + \lambda_b b &\Longrightarrow (\lambda_{a+b} - \lambda_a)a + (\lambda_{a+b} - \lambda_b)b = 0_{\mathrm{E}} \\ &\Longrightarrow \lambda_a = \lambda_b \end{aligned}$$

Pour α réel, on a $\qquad f(\alpha a) = \lambda_{\alpha a}\alpha a = \alpha f(a) = \alpha\lambda_a a \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{\alpha a} = \lambda_a$

Ainsi, pour tout $b \in \mathrm{E}$, on a $\lambda_a = \lambda_b$ autrement dit λ_a ne dépend pas de a. On en déduit que $f(x) = \lambda x$ pour tout x non nul et la relation vaut aussi pour $x = 0_{\mathrm{E}}$ puisque f est linéaire. Réciproquement, si $f \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{id}\,)$, alors $f \in \mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E}))$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E})) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{id}\,)}$$

Exercice 7 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\qquad \forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}$

Justifier que φ atteint ses bornes sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et les préciser.

Corrigé : L'application φ est linéaire sur E de dimension finie donc φ est continue. L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de E et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un fermé relatif de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc un compact de E.

Ainsi $\qquad \boxed{\text{L'application } \varphi \text{ atteint ses bornes sur } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}).}$

Considérons $\mathrm{F} = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle = \mathrm{X}^\top \mathrm{Y}$ pour $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{F}^2$. Notant U la colonne de F constituée de 1, on a

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \langle \mathrm{MU}, \mathrm{U} \rangle$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en observant que $\|\mathrm{MU}\| = \|\mathrm{U}\|$ pour $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, il vient

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \varphi(-\mathrm{I}_n) = -n \leqslant \varphi(\mathrm{M}) \leqslant n = \varphi(\mathrm{I}_n)$$

Seule la borne inférieure sur $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ mérite un effort supplémentaire. Soit $\mathrm{V} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U})^\perp$ puis M matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}, \mathrm{V})^\perp$. Ainsi, la matrice M est orthogonalement semblable à $\mathrm{diag}(-1, -1, 1, \ldots, 1)$ donc dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi(\mathrm{M}) = \langle \mathrm{MU}, \mathrm{U} \rangle = \langle -\mathrm{U}, \mathrm{U} \rangle = -n$. On conclut

$$\boxed{\operatorname*{Inf}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi = \operatorname*{Inf}_{\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})} \varphi = -n \quad \text{et} \quad \operatorname*{Sup}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi = \operatorname*{Sup}_{\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})} \varphi = n}$$

Variante : On peut aussi interpréter pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ la quantité $\varphi(\mathrm{M})$ par

$$\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{MJ})$$

avec $\mathrm{J} \in \mathrm{E}$ constituée de 1 puis réduire orthogonalement J.