ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°55

Exercice 1 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Établir

$$\mathrm{Im}\ u^* = (\mathrm{Ker}\ u)^{\perp} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\ u^* = (\mathrm{Im}\ u)^{\perp}$$

Exercice 2 (*)

Soit E euclidien. Déterminer les endomorphismes auto-adjoints et orthogonaux.

Exercice 3 (*)

Soit n entier non nul, $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \geqslant 0$. Montrer

$$\forall \mathrm{U} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \qquad |\mathrm{Tr}\,(\mathrm{DU})| \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{D})$$

Exercice 4 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ avec n entier non nul nul et a un vecteur normé de E. Déterminer la matrice dans la base canonique de $s_{\mathrm{Vect}\,(a)^{\perp}}$.

Exercice 5 (*)

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul. Montrer :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$$

Exercice 6 (*)

Soit E euclidien. Soient F et G des sev orthogonaux de E. Montrer que

$$s_{\mathrm{F}} \circ s_{\mathrm{G}} = s_{\mathrm{G}} \circ s_{\mathrm{F}} = s_{(\mathrm{F} \oplus \mathrm{G})^{\perp}}$$

Exercice 7 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul nul muni du produit scalaire canonique. On pose

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} - \frac{2}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Calculer φ^2 puis décrire φ.
2. Soit $\psi \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Décrire $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$.

Exercice 8 (**)

Soit E euclidien et $(a,b) \in \mathrm{E}^2$ avec a normé. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = x + \langle x, a\rangle b$$

1. Justifier que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ puis $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ puis f diagonalisable.

Exercice 9 (**)

Soit n entier non nul. Montrer que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercice 10 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ vérifiant $\mathrm{Tr}\,(u) = \dim \mathrm{E}$. Déterminer u.

Exercice 11 (**)

Soit E euclidien et G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

1. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Montrer que tout sev stable par f admet un supplémentaire stable.
2. Montrer que $(x,y) \mapsto \sum\limits_{g\in\mathrm{G}} \langle g(x), g(y)\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
3. Soit F sev stable par tous les éléments de G. Montrer que F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.