ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°56

Exercice 1 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer

$$\mathrm{Ker}\,(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}\ f \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(f^* \circ f) = \mathrm{Im}\ f^*$$

Exercice 2 (**)

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul. Montrer :

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n$$

Exercice 3 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul. Montrer qu'il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{T} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $\mathrm{A} = \mathrm{OT}$.

Exercice 4 (***)

Soit E euclidien et a, b vecteurs non nuls de E. Déterminer les bornes inférieures et supérieures de φ sur $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ avec

$$\forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\} \qquad \varphi(x) = \frac{\langle a, x\rangle \langle b, x\rangle}{\|x\|^2}$$

Exercice 5 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul et vérifiant $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^\top$.

1. Montrer que $\mathrm{A}^3 = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n)$ est paire.
3. Réduire orthogonalement A.

Exercice 6 (***)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul. Pour une famille $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathrm{E}^p$, on note $\mathrm{G}_u = \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{(i,j) \in [\![1\,;\,p]\!]^2} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Soient $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathrm{E}^p$ et $v = (v_1, \ldots, v_p) \in \mathrm{E}^p$ telles que $\mathrm{G}_u = \mathrm{G}_v$. On pourra utiliser librement les résultats déjà rencontrés sur les matrices de Gram.

1. On suppose u libre. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ tel que $f(u_i) = v_i$ pour $i \in [\![1\,;\,p]\!]$.
2. Généraliser le résultat précédent pour u quelconque.

Exercice 7 (***)

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer $\qquad \mathrm{I}_n + \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

   puis $\qquad \mathrm{B} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})(\mathrm{I}_n + \mathrm{A})^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad -1 \notin \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$

2. On définit φ sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \qquad \varphi(\mathrm{A}) = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})(\mathrm{I}_n + \mathrm{A})^{-1}$$

   Montrer que φ réalise une bijection de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\{\mathrm{B} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})\}$.

Exercice 8 (***)

Soient E euclidien et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ vérifiant

$$f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E} \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

Montrer que $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$.

Exercice 9 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ conservant l'orthogonalité, *i.e.*

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle x, y \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle f(x), f(y) \rangle = 0$$

1. Pour u et v dans E unitaires, calculer $\langle u + v, u - v \rangle$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|f(x)\| = \alpha \|x\|$$

3. Conclure qu'il existe $g \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ tel que $f = \alpha g$.