ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°57

Exercice 1 (**)

Soit a vecteur unitaire d'un espace euclidien E, α un réel et f_α définie par

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, a\rangle a$$

1. Justifier que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer que $f_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \alpha \neq -1$. Décrire f_{-1}.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour avoir $f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Quand la condition est réalisée, décrire f_α.

Indications : 2, 3. Choisir $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E adaptée à f_α afin d'avoir une forme remarquable pour $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f_\alpha$.

Exercice 2 (**)

Déterminer l'intérieur de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Indications : Pour $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^\circ$, considérer $\mathrm{M} + \varepsilon \mathrm{I}_n$ avec $\varepsilon \in [\,0\,;r\,[$ et $r > 0$ bien choisi.

Exercice 3 (**)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul et $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle u_i$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée de E, déterminer f.
3. On suppose $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$.
   (a) Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.
   (b) Pour $i \in [\![1\,; n]\!]$, calculer $\langle f(u_i), u_i\rangle$ et en déduire que $\|u_i\| \in \,]\,0\,;1\,]$.
   (c) Pour $i \in [\![1\,; n]\!]$, en considérant $x \in \mathrm{Vect}\left((u_k)_{k\in[\![1\,;n]\!]\smallsetminus\{i\}}\right)^\perp \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$, montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée.

Indications : 2. Identifier un projecteur.
3.(a) Établir le caractère générateur de $(u_1, \ldots, u_n)$ pour E.
3.(b) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3.(c) Justifier le choix du vecteur x proposé puis considérer $f(x)$ utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 4 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ vérifiant $\langle u(x), x\rangle = 0$. Décrire u.

Indications : Montrer que $\langle u(x), y\rangle = -\langle u(y), x\rangle$ pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. En déduire une forme particulière pour $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ avec $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Conclure avec le théorème de réduction des isométries.

Exercice 5 (***)

Calculer Card $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

Indications : Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Observer que pour une colonne, un et un seul coefficient est non nul. Utiliser ensuite l'orthogonalité des colonnes pour déterminer la forme de A.

Exercice 6 (***)

Soit E espace euclidien. Déterminer l'ensemble $\mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E}))$ des endomorphismes commutant avec toutes les isométries vectorielles de E.

Indications : Soit $f \in \mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E}))$ et $a \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Considérer f et $s_{\mathrm{Vect}\,(a)}$ et en déduire que $(f(a), a)$ est liée.

Exercice 7 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\qquad \forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}$

Justifier que φ atteint ses bornes sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et les préciser.

Indications : Dans $\mathrm{F} = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, calculer $\langle \mathrm{MU}, \mathrm{U} \rangle$ avec U la colonne constituée de 1.