

# ESPACES EUCLIDIENS

B. Landelle

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Adjoint d'un endomorphisme</b>	<b>2</b>
1	Définition . . . . .	2
2	Propriétés . . . . .	3
<b>II</b>	<b>Isométries vectorielles</b>	<b>4</b>
1	Définition, propriétés . . . . .	4
2	Groupe orthogonal . . . . .	5
3	Symétries orthogonales . . . . .	6
<b>III</b>	<b>Matrices orthogonales</b>	<b>7</b>
1	Définitions, propriétés . . . . .	7
2	Groupe orthogonal . . . . .	8
3	Isométries vectorielles et matrices orthogonales . . . . .	9
<b>IV</b>	<b>Réduction des isométries</b>	<b>9</b>
1	Orientation d'un espace vectoriel . . . . .	9
2	Le groupe $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ . . . . .	10
3	Réduction d'une isométrie . . . . .	13
<b>V</b>	<b>Endomorphismes auto-adjoints</b>	<b>16</b>
1	Définition . . . . .	16
2	Propriétés . . . . .	17
3	Théorème spectral . . . . .	18
<b>VI</b>	<b>Positivité</b>	<b>19</b>
1	Définitions . . . . .	19
2	Propriétés . . . . .	19

# Rappels

On appelle espace euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie. Dans E espace euclidien, pour tout sev F de E, on a

$$E = F \oplus F^\perp \quad \text{et} \quad (F^\perp)^\perp = F$$

Il existe une base orthonormée de E. On suppose E non nul. Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormée de E. Pour  $x \in E$ , on a  $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ . Pour  $(x, y) \in E^2$ , notant  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$  et  $X = \text{mat}_{\mathcal{B}} x$ ,  $Y = \text{mat}_{\mathcal{B}} y$ , on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^\top Y = \langle X, Y \rangle \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = X^\top X = \|X\|^2$$

Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} u = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , on a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, u(y) \rangle = X^\top A Y = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j a_{i,j}$$

Dans tout ce qui suit, l'ensemble E désigne un espace euclidien non nul. Les espaces  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  sont munis de leurs structures euclidiennes canoniques et on confond vecteur de  $\mathbb{R}^n$  et matrice colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

## I Adjoint d'un endomorphisme

### 1 Définition

**Théorème 1 (Théorème de représentation de Riesz).**

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \quad \exists ! a \in E \quad | \quad \forall x \in E \quad \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$

*Démonstration.* L'application  $\Phi : E \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ ,  $a \mapsto (x \mapsto \langle a, x \rangle)$  est linéaire injective entre deux espaces de même dimension donc est un isomorphisme.  $\square$

**Remarque :** L'espace  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  des formes linéaires de E est appelé *dual* de E et habituellement noté  $E^*$ .

**Théorème 2.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Il existe un unique endomorphisme  $u^* \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

*Démonstration.* Soit  $y \in E$ . D'après le théorème de Riesz appliqué à la forme linéaire  $x \mapsto \langle u(x), y \rangle$ , on dispose d'un unique  $u^*(y) \in E$  tel que

$$\forall x \in E \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

ce qui prouve l'existence d'une unique application  $u^* : E \rightarrow E$  vérifiant la relation attendue. Soient  $y, z$  dans E et  $\lambda$  réel. On a pour  $x \in E$

$$\langle u(x), y + \lambda z \rangle = \langle x, u^*(y + \lambda z) \rangle$$

puis

$$\langle u(x), y + \lambda z \rangle = \langle u(x), y \rangle + \lambda \langle u(x), z \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle + \lambda \langle x, u^*(z) \rangle = \langle x, u^*(y) + \lambda u^*(z) \rangle$$

Par unicité de cette écriture, on en déduit la linéarité de  $u^*$ .  $\square$

**Définition 1.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . L'endomorphisme  $u^*$  est appelé endomorphisme adjoint de  $u$ .

**Remarques :** (1) Il est immédiat que  $\text{id}^* = \text{id}$ .

(2) Par symétrie du produit scalaire, on a évidemment

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

**Vocabulaire :** L'application  $\mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E), u \mapsto u^*$  est appelée *adjonction*.

## 2 Propriétés

**Proposition 1.** Soient  $u, v$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $\lambda$  réel. On a

1.  $(u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^*$  ;
2.  $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$  ;
3.  $(u^*)^* = u$  ;
4.  $u \in \text{GL}(E) \iff u^* \in \text{GL}(E)$  et dans ce cas  $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $(x, y) \in E^2$ . On a

$$\langle (u + \lambda v)(x), y \rangle = \langle u(x), y \rangle + \lambda \langle v(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle + \lambda \langle x, v^*(y) \rangle = \langle x, (u^* + \lambda v^*)(y) \rangle$$

d'où le résultat par unicité de l'adjoint.

2. Soit  $(x, y) \in E^2$ . On a

$$\langle (u \circ v)(x), y \rangle = \langle u(v(x)), y \rangle = \langle v(x), u^*(y) \rangle = \langle x, v^*(u^*(y)) \rangle = \langle x, (v^* \circ u^*)(y) \rangle$$

d'où le résultat par unicité de l'adjoint.

3. Soit  $(x, y) \in E^2$ . On a

$$\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, (u^*)^*(y) \rangle \quad \text{et} \quad \langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

d'où le résultat par unicité de l'adjoint.

4. Supposons  $u$  inversible. On a  $(u \circ u^{-1})^* = \text{id}^* = \text{id} = (u^{-1})^* \circ u^*$  d'où l'existence d'un inverse à gauche de  $u^*$  ce qui prouve son inversibilité et l'inverse à gauche est son inverse. Le sens indirect s'obtient en appliquant le sens direct à  $u^*$ .  $\square$

**Remarque :** On a prouvé en particulier que l'adjonction est une involution linéaire de  $\mathcal{L}(E)$ , autrement dit une symétrie de  $\mathcal{L}(E)$ .

**Proposition 2.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  base orthonormée de  $E$ . On a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} u^* = \text{mat}_{\mathcal{B}} u^\top$$

*Démonstration.* On note  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Soit  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ . On a

$$\langle u^*(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, u(e_i) \rangle$$

et le résultat suit.  $\square$

**Proposition 3.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on a  $\det(u^*) = \det(u)$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ , il vient

$$\det(u^*) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}} u^*) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}} u^\top) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}} u) = \det(u)$$

$\square$

**Proposition 4.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  sev de  $E$  stable par  $u$ . Alors, le sev  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .

*Démonstration.* Soit  $(x, y) \in F^\perp \times F$ . On a

$$\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = 0$$

d'où  $u^*(F^\perp) \perp F$  ce qui prouve le résultat attendu.  $\square$

## II Isométries vectorielles

### 1 Définition, propriétés

**Définition 2.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que l'endomorphisme  $u$  est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme, i.e.

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

**Notations :** On note  $\mathcal{O}(E)$  l'ensemble des isométries vectorielles de  $E$ .

**Exemples :** 1. Dans  $E$  euclidien,  $\text{id}$  et  $-\text{id}$  sont des isométries.

2. Soit  $E = \mathbb{R}^2$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  avec  $u(x, y) = (y, -x)$  pour tout  $(x, y) \in E$ .

**Proposition 5.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \iff u \text{ est une isométrie}$$

**Vocabulaire :** On dit que  $u$  conserve le produit scalaire ou que  $u$  est un *endomorphisme orthogonal*.

*Démonstration.* Le sens direct est immédiat. Réciproquement, on utilise l'identité de polarisation. Pour  $(x, y) \in E^2$ , on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y) \rangle &= \frac{1}{2} [\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2] = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

□

**Proposition 6.** On a l'inclusion  $\mathcal{O}(E) \subset \text{GL}(E)$

*Démonstration.* On a  $u(x) = 0_E \implies \|u(x)\| = 0 \implies \|x\| = 0 \implies x = 0_E$

Ainsi,  $u$  est un endomorphisme injectif sur  $E$  espace de dimension finie donc  $u \in \text{GL}(E)$ . □

**Vocabulaire :** Les isométries vectorielles sont aussi appelées *automorphismes orthogonaux* puisque ce sont des automorphismes qui conservent le produit scalaire (et donc l'orthogonalité).

**Théorème 3.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . On a

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff u(\mathcal{B}) \text{ base orthonormée de } E$$

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Supposons  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Pour  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ , on a

$$\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

d'où  $u(\mathcal{B})$  base orthonormée. Supposons  $u(\mathcal{B})$  une base orthonormée de  $E$ . Soit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et

$y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ . On a

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \underbrace{\langle u(e_i), u(e_j) \rangle}_{\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x, y \rangle$$

□

**Théorème 4.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff u \in \text{GL}(E) \quad \text{et} \quad u^* = u^{-1}$$

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ . On a  $u$  automorphisme puis pour  $(x, y) \in E^2$

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(u^{-1}(y)) \rangle = \langle x, u^{-1}(y) \rangle$$

d'où le résultat par unicité de l'adjoint. Supposons  $u$  inversible et  $u^* = u^{-1}$ . Pour  $x \in E$ , il vient

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^*(u(x)) \rangle = \|x\|^2$$

et le résultat suit.  $\square$

**Proposition 7.** Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Alors, les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1,

c'est-à-dire

$$\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$$

*Démonstration.* Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  et  $x \in E_\lambda(u) \setminus \{0_E\}$ . Alors

$$\|u(x)\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \implies \|x\| = |\lambda| \|x\|$$

Comme  $x$  est non nul, on a  $\|x\| \neq 0$  et par suite  $|\lambda| = 1$  i.e.  $\lambda \in \{-1, 1\}$ .  $\square$

**Remarque :** Pour  $u$  isométrie et  $\mathcal{B}$  base orthonormée de  $E$ , on peut avoir  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\text{mat}_{\mathcal{B}}u)$  non inclus dans  $\mathbb{R}$ . Par exemple, si l'application  $u$  est canoniquement associé à  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , l'application  $u$  est une isométrie avec  $\text{Sp}(u) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$  tandis que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\pm i\}$ .

## 2 Groupe orthogonal

**Proposition 8.** L'ensemble  $\mathcal{O}(E)$  est un sous-groupe de  $(\text{GL}(E), \circ)$ .

*Démonstration.* On a  $\text{id} \in \mathcal{O}(E)$ . Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Alors  $u$  est bijectif donc admet un inverse pour la composition qui est sa réciproque. Puis, pour tout  $x \in E$ , on a  $\|x\| = \|u \circ u^{-1}(x)\| = \|u^{-1}(x)\|$  autrement dit  $u^{-1}$  est une isométrie. Enfin, pour tout  $(u, v) \in \mathcal{O}(E)^2$ , on a

$$\forall x \in E \quad \|u \circ v(x)\| = \|u(v(x))\| = \|v(x)\| = \|x\|$$

d'où  $u \circ v \in \mathcal{O}(E)$ . Ainsi,  $\mathcal{O}(E)$  est un sous-groupe de  $\text{GL}(E)$ .  $\square$

**Définition 3.** L'ensemble  $\mathcal{O}(E)$  des isométries vectorielles de  $E$  est appelé groupe orthogonal de  $E$ .

**Proposition 9.** Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ . On a  $\det(u) \in \{\pm 1\}$ .

*Démonstration.* On a  $u^* \circ u = \text{id}$  d'où  $\det(u^* \circ u) = 1$  et  $\det(u^* \circ u) = \det(u)^2$ . Le résultat suit.  $\square$

**Définition 4.** Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ . On dit que  $u$  est une isométrie vectorielle directe ou positive si  $\det(u) = 1$  et indirecte ou négative si  $\det(u) = -1$ .

**Proposition 10.** L'ensemble  $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = 1\}$  est un sous-groupe de  $(\mathcal{O}(E), \circ)$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi : \mathcal{O}(E) \rightarrow \{-1, 1\}$ ,  $u \mapsto \det(u)$ . Les couples  $(\mathcal{O}(E), \circ)$  et  $(\{-1, 1\}, \times)$  sont des groupes et l'application  $\varphi$  est un morphisme de groupes. Alors, on a  $\mathcal{SO}(E) = \text{Ker } \varphi$  sous-groupe de  $\mathcal{O}(E)$  comme noyau d'un morphisme de groupes.  $\square$

**Définition 5.** L'ensemble  $\mathcal{SO}(E)$  est appelé groupe spécial orthogonal de  $E$ .

**Notations :** On note  $\mathcal{O}^-(E)$  l'ensemble des isométries vectorielles indirectes de  $E$ .

### 3 Symétries orthogonales

**Définition 6.** Soit  $F$  sev de  $E$ . On appelle symétrie orthogonale par rapport à  $F$  notée  $s_F$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

**Définition 7.** Une symétrie  $s \in \mathcal{L}(E)$  est dite orthogonale si  $\text{Ker}(s - \text{id}) \perp \text{Ker}(s + \text{id})$ .

**Remarque :** Une symétrie orthogonale  $s$  est la symétrie orthogonale  $s_{\text{Ker}(s - \text{id})}$  au sens de la définition 6.

**Proposition 11.** Soit  $F$  sev de  $E$ . La symétrie  $s_F$  est la symétrie orthogonale associée à la projection orthogonale  $p_F$  avec  $s_F = 2p_F - \text{id}$ .

*Démonstration.* On a  $\text{Ker}(s_F - \text{id}) = \text{Im } p_F = F \perp F^\perp = \text{Ker}(s_F + \text{id}) = \text{Ker } p_F$   
d'où le résultat. □

**Proposition 12.** Soit  $s$  une symétrie de  $E$ . On a

$$s \text{ orthogonale} \iff s \in \mathcal{O}(E)$$

*Démonstration.* Supposons  $s$  orthogonale. On a

$$E = \text{Ker}(s - \text{id}) \oplus^\perp \text{Ker}(s + \text{id})$$

Soit  $x \in E$ . On dispose d'un unique couple  $(a, b) \in \text{Ker}(s - \text{id}) \times \text{Ker}(s + \text{id})$  tel que  $x = a + b$ . On a  $s(x) = a - b$  puis, avec le théorème de Pythagore,

$$\|s(x)\|^2 = \|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 = \|x\|^2$$

Ainsi, l'application  $s$  est une isométrie. Réciproquement, si l'application  $s$  est une isométrie, alors elle conserve le produit scalaire. Par suite

$$\forall (a, b) \in \text{Ker}(s - \text{id}) \times \text{Ker}(s + \text{id}) \quad \langle a, b \rangle = -\langle s(a), s(b) \rangle = -\langle a, b \rangle = 0$$

d'où le caractère orthogonal de  $s$  en tant que symétrie.

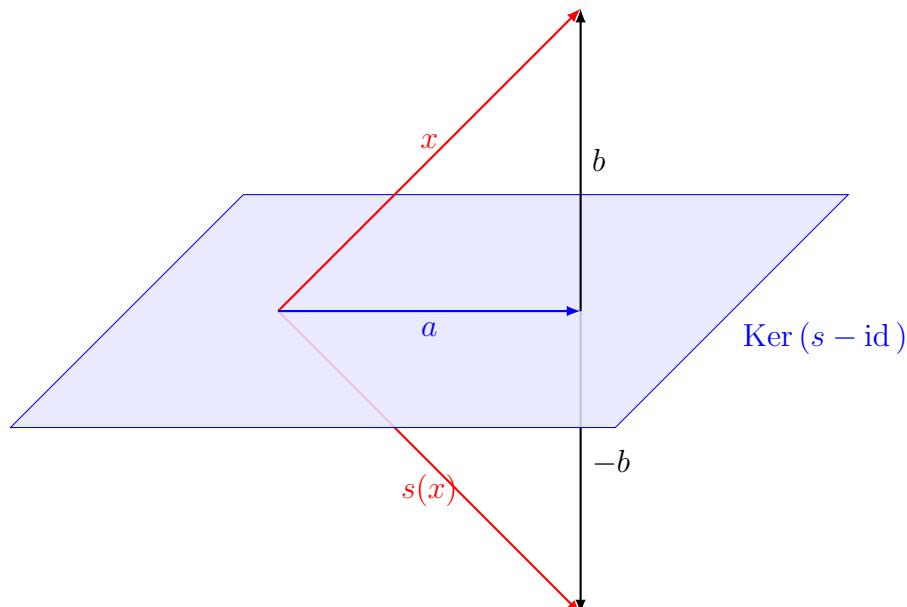


FIGURE 1 – Symétrie orthogonale

□

**Définition 8.** Soit  $s$  une symétrie orthogonale. Si  $\dim \text{Ker}(s + \text{id}) = 1$ , la symétrie  $s$  est appelée réflexion orthogonale par rapport à  $\text{Ker}(s - \text{id})$ .

**Remarque :** L'espace des invariants  $\text{Ker}(s - \text{id})$  est un hyperplan de  $E$  à l'image du reflet dans un miroir (on peut voir  $s$  comme l'application « reflet dans le miroir »).

**Proposition 13 (À refaire).** Soit  $a$  un vecteur normé de  $E$ . On a

$$\forall x \in E \quad s_{\text{Vect}(a)^\perp}(x) = x - 2\langle x, a \rangle a$$

*Démonstration.* Notons simplement  $s = s_{\text{Vect}(a)^\perp}$ . On a  $E = \text{Vect}(a)^\perp \oplus \text{Vect}(a)$ . Ainsi pour  $x \in E$ ,

$$\exists!(u, v) \in \text{Vect}(a)^\perp \times \text{Vect}(a) \quad | \quad x = u + v$$

et  $s(x) = u - v$ . Or comme  $(a)$  est une base orthonormée de  $\text{Vect}(a)$ , il s'ensuit que  $v = \langle x, a \rangle a$  et  $u = x - \langle x, a \rangle a$ . Le résultat suit.

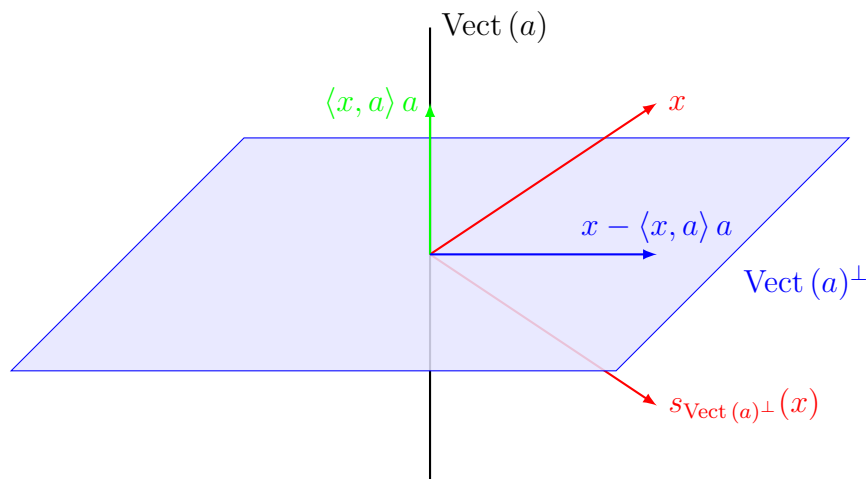


FIGURE 2 – Réflexion orthogonale

□

### III Matrices orthogonales

#### 1 Définitions, propriétés

**Définition 9.** Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite orthogonale si elle vérifie  $A^\top A = I_n$ .

**Notations :** On note  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{O}(n)$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Proposition 14.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On a

$$A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} = A^\top$$

*Démonstration.* Propriété du groupe  $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ . □

**Remarque :** D'après les propriétés de structure de groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ , on a

$$A^\top A = I_n \iff AA^\top = I_n \iff A^\top A = AA^\top = I_n$$

**Théorème 5.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  ;
2. Les vecteurs colonnes de  $A$  forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  ;
3. Les vecteurs lignes de  $A$  forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  ;

*Démonstration.* Notons  $(C_1, \dots, C_n)$  les colonnes de  $A$ . On a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad (A^\top A)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = \langle C_i, C_j \rangle$$

On en déduit l'équivalence (1)  $\iff$  (2). L'équivalence (1)  $\iff$  (3) s'en déduit par transposition car  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff A^\top \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Remarque :** On peut généraliser le sens du calcul auxiliaire vu précédemment. Pour  $A = (A_1 | \dots | A_n)$  et  $B = (B_1 | \dots | B_n)$  matrices de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ , on a  $A^\top B = (\langle A_i, B_j \rangle_{\mathbb{R}^p})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

**Proposition 15.** Soient  $\mathcal{B}_1$  une base orthonormée de  $E$  et  $\mathcal{B}_2$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .

On a  $\text{mat}_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_2 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff \mathcal{B}_2$  base orthonormée de  $E$

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$  et  $P = \text{mat}_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_2 = (p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ . On a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad (P^\top P)_{i,j} = \sum_{k=1}^n p_{k,i} p_{k,j} = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$$

d'où  $P^\top P = I_n \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{i,j}$

$\square$

## 2 Groupe orthogonal

**Proposition 16.** L'ensemble  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ .

*Démonstration.* On a  $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Soient  $A, B$  dans  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Alors, on a

$$(AB)^\top AB = I_n \quad \text{et} \quad (A^{-1})^\top A^{-1} = AA^\top = I_n$$


$\square$

**Définition 10.** L'ensemble  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est appelé groupe orthogonal d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 17.** Soit  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . On a  $\det(A) \in \{\pm 1\}$ .

*Démonstration.* On a  $\det(A^\top A) = \det(A)^2 = \det(I_n) = 1$

Le résultat suit.  $\square$

 **Avertissement :** ce résultat ne caractérise nullement les matrices orthogonales. Pour  $n \geq 2$ , la matrice  $I_n + E_{1,n}$  a un déterminant égal à 1 mais n'est pas orthogonale puisque sa dernière colonne n'est pas normée.

**Définition 11.** Soit  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . La matrice  $A$  est dit orthogonale positive ou directe si  $\det(A) = 1$  et négative ou indirecte si  $\det(A) = -1$ .



**Proposition 18.** L'ensemble  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  (noté aussi  $\mathcal{SO}(n)$ ) défini par  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$  est un sous-groupe de  $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi : \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \{-1, 1\}$ ,  $M \mapsto \det(M)$ . Les couples  $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$  et  $(\{-1, 1\}, \times)$  sont des groupes et l'application  $\varphi$  est un morphisme de groupes. Alors, on a  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker } \varphi$  sous-groupe de  $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$  comme noyau d'un morphisme de groupes.  $\square$

**Définition 12.** L'ensemble  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  est appelé groupe spécial orthogonal d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Notations :** On note  $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{O}^-(n)$  l'ensemble des matrices orthogonales négatives.

### 3 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

**Théorème 6.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . On a

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff \text{mat}_{\mathcal{B}}u \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

*Démonstration.* On a, avec la proposition 15 et le théorème 3

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{B}}u \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) &\iff \text{mat}_{\mathcal{B}}u(\mathcal{B}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ &\iff u(\mathcal{B}) \text{ base orthonormée de } E \iff u \in \mathcal{O}(E) \end{aligned}$$

$\square$

**Corollaire 1.** Soit  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . L'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  canoniquement associé à  $A$  appartient à  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* La base canonique  $\mathcal{C}$  est une base orthonormée de  $E = \mathbb{R}^n$  (pour le produit scalaire canonique). Ainsi, l'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  canoniquement associé est tel que  $\text{mat}_{\mathcal{C}}u \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  d'où  $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$  d'après le théorème 6.  $\square$

**Corollaire 2.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  base orthonormée de  $E$ . On a

$$u \in \mathcal{SO}(E) \iff \text{mat}_{\mathcal{B}}u \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$$

*Démonstration.* Immédiate car  $\det(u) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}}u)$  avec  $\mathcal{B}$  base de  $E$ .  $\square$

**Remarque :** On peut annoncer le même résultat en remplaçant  $\mathcal{SO}(E)$  et  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  par  $\mathcal{O}^-(E)$  et  $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ .

## IV Réduction des isométries

### 1 Orientation d'un espace vectoriel

**Définition 13.** Soit  $\mathcal{B}_0$  une base de  $E$ . On dit qu'une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  donne la même orientation à  $E$  que  $\mathcal{B}_0$  si  $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$  et donne une orientation opposée à celle de  $\mathcal{B}_0$  si  $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$ .

**Définition 14.** L'espace  $E$  est dit orienté si on fixe une base  $\mathcal{B}_0$  pour le choix de l'orientation de toute base. Une base ayant même orientation que  $\mathcal{B}_0$  est dite directe et indirecte dans le cas contraire.

**Exemple :** Par convention, on oriente  $\mathbb{R}^2$  avec la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  et on oriente  $\mathbb{R}^3$  avec la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .



FIGURE 3 – Orientation des espaces  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$

**Proposition 19.** Soit  $E$  espace euclidien orienté et  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  deux bases directes de  $E$ . Alors on a  $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B}_0$  la base de  $E$  déterminant l'orientation de toute base. On a

$$\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) = \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_0) \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_2) = \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1)^{-1} \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_2) > 0$$

□

**Proposition 20.** Soit  $E$  espace euclidien orienté et  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  deux bases orthonormées directes de  $E$ . On a  $\det_{\mathcal{B}_1} = \det_{\mathcal{B}_2}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{L}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . On a

$$\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{L}) = \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) \det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{L})$$

et la matrice  $\text{mat}_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_2$  est orthogonale comme matrice de passage entre deux bases orthonormées et positive car les bases sont directes. □

## 2 Le groupe $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

**Théorème 7.** Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On a  $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  si et seulement s'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* On pose  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $a, b, c, d$  réels et on écrit

$$A^T A = I_2 \iff \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \iff \exists (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} a + ic = e^{i\theta} \\ d + ib = e^{i\theta'} \\ \sin(\theta + \theta') = 0 \end{cases}$$

et comme  $\sin(\theta + \theta') = 0$  équivaut à  $\theta' \equiv -\theta \pmod{\pi}$ , on conclut par élimination de  $\theta'$

$$AA^T = I_2 \iff \exists \theta \in \mathbb{R} : \begin{cases} a + ic = e^{i\theta} \\ d + ib = e^{-i\theta} \end{cases} \quad \text{ou} \quad e^{i(-\theta + \pi)}$$

□

**Corollaire 3.**

$$\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R}) = \left\{ S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

*Démonstration.* Immédiate par le calcul du déterminant. □

**Remarque :** Pour  $\theta$  réel, on a  $R(\theta)$  orthogonalement semblable à  $R(-\theta)$ . Pour  $r \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  canoniquement associé, il suffit de considérer  $\text{mat}_{\mathcal{B}} r$  avec  $\mathcal{B} = (e_2, e_1)$  (ce qui change l'orientation de la base).

**Théorème 8.** *L'application  $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ ,  $\theta \mapsto R(\theta)$  est un morphisme du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  vers le groupe  $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ , autrement dit*

$$\forall (\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \quad R(\theta)R(\alpha) = R(\theta + \alpha)$$

*C'est un morphisme surjectif de noyau  $\text{Ker } R = 2\pi\mathbb{Z}$  et le couple  $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$  est un groupe commutatif.*

*Démonstration.* Le calcul donne  $R(\theta)R(\alpha) = R(\theta + \alpha)$  pour tout  $(\alpha, \theta) \in \mathbb{R}^2$  ce qui prouve que l'application  $R$  est bien un morphisme de groupes. Ce morphisme est surjectif d'après la description de  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  faite au corollaire 3 et comme la loi  $\times$  est commutative sur  $\text{Im } R$ , ceci prouve que le groupe  $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$  est commutatif. Enfin, on a pour  $\theta$  réel

$$\varphi(\theta) = I_2 \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Enfin, □

**Remarque :** En particulier, pour  $\theta$  réel, on a  $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$  puisque  $I_2 = R(\theta - \theta) = R(\theta)R(-\theta)$ .

**Corollaire 4.** *Soit  $E$  espace euclidien orienté de dimension 2. Soit  $r \in \mathcal{SO}(E)$ . Alors il existe  $\theta$  réel unique modulo  $2\pi$  tel que, pour toute base orthonormée directe  $\mathcal{B}$ , on a  $\text{mat}_{\mathcal{B}} r = R(\theta)$ .*

*Démonstration.* Soit  $r \in \mathcal{SO}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée directe. D'après le corollaire, 2, on a  $\text{mat}_{\mathcal{B}} r \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  et d'après le corollaire 3, il existe  $\theta$  réel tel que  $\text{mat}_{\mathcal{B}} r = R(\theta)$  et pour  $\theta'$  réel, on a  $R(\theta) = R(\theta')$  si et seulement si  $\theta \equiv \theta' [2\pi]$ . Soit  $\mathcal{B}'$  une base orthonormée directe de  $E$ . D'après la proposition 15, on a  $P = \text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  et comme les deux bases sont directes, on a  $\det P > 0$  d'où  $P \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  et par suite,  $P = R(\alpha)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ainsi, d'après les formules de changement de base

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} r = P^{-1}R(\theta)P = R(-\alpha)R(\theta)R(\alpha) = R(-\alpha + \theta + \alpha) = R(\theta) = \text{mat}_{\mathcal{B}} r$$

□

**Définition 15.** *Soit  $E$  euclidien orienté de dimension 2. On appelle rotation vectorielle ou simplement rotation tout élément de  $\mathcal{SO}(E)$ . Étant donnée  $\mathcal{B}$  une base orthonormée directe de  $E$ , pour  $r \in \mathcal{SO}(E)$ , notant  $R(\theta) = \text{mat}_{\mathcal{B}} r$  avec  $\theta$  réel, on dit que  $r$  est la rotation d'angle  $\theta$  ou que  $\theta$  est une mesure de l'angle de la rotation  $r$ .*

**Théorème 9.** *Soit  $E$  euclidien orienté de dimension 2 et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs normés de  $E$ . Il existe une unique rotation  $r \in \mathcal{SO}(E)$  telle que  $r(\vec{u}) = \vec{v}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de compléter respectivement  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  en bases orthonormées directes  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  et de considérer l'application linéaire qui envoie l'une sur l'autre. La matrice de cette application dans la base  $\mathcal{B}_1$  est matrice de passage entre deux bases orthonormées directes donc égale à  $R(\theta)$  avec  $\theta$  réel et la matrice d'une rotation envoyant  $\vec{u}$  sur  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}_1$  aura la même première colonne et sera donc égale à  $R(\theta)$ .  $\square$

**Définition 16.** Soit  $E$  euclidien orienté de dimension 2 et  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs non nuls de  $E$ . On appelle mesure de l'angle orienté d'un couple de vecteurs  $(\vec{u}, \vec{v})$  une mesure  $\theta$  de l'angle de l'unique rotation qui transforme  $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$  en  $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  que l'on note  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ , définie modulo  $2\pi$  par :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \theta [2\pi]$$

Illustration d'une rotation  $r \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^2)$  d'angle  $\theta$  réel.

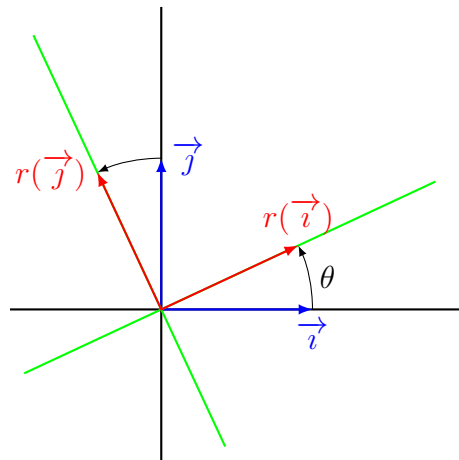


FIGURE 4 – Rotation dans  $\mathbb{R}^2$

**Théorème 10.** Soit  $E$  euclidien de dimension 2 et  $s \in \mathcal{O}^-(E)$ . Alors  $s$  est une symétrie orthogonale et il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  telle que  $\text{mat}_{\mathcal{B}}s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B}'$  base orthonormée de  $E$ . Alors  $\text{mat}_{\mathcal{B}'}s = S(\theta)$  avec  $\theta$  réel. On a  $S(\theta)^2 = I_2$  et donc  $s$  symétrie et  $s \in \mathcal{O}(E)$  donc  $s$  est une symétrie orthogonale. On a clairement  $s \notin \{\pm \text{id}\}$  car  $S(\theta) \neq \pm I_2$  ou car  $\det(s) = -1$ . Il en résulte  $E = \text{Ker}(s - \text{id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{id})$  où chacun des sev de la décomposition est une droite vectorielle. En considérant une base orthonormée  $\mathcal{B}$  adaptée à cette décomposition, on a  $\text{mat}_{\mathcal{B}}s = \text{diag}(1, -1)$ .  $\square$

**Remarque :** Les éléments de  $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$  sont des matrices de réflexions.

Illustration d'une réflexion  $s \in \mathcal{O}^-(\mathbb{R}^2)$  avec  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  une base de réduction.

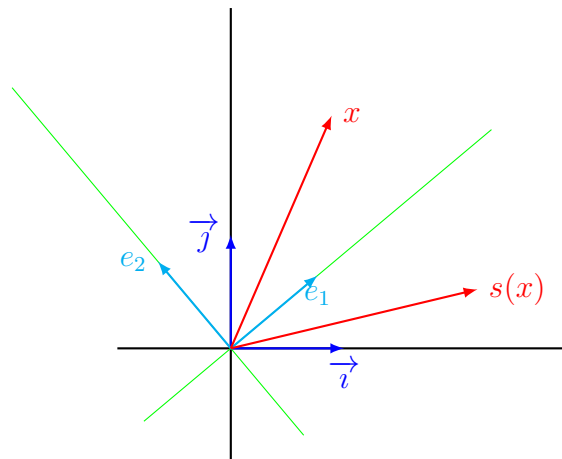


FIGURE 5 – Réflexion dans  $\mathbb{R}^2$

### 3 Réduction d'une isométrie

**Proposition 21.** Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$  et  $F$  sev de  $E$  stable par  $u$ . L'endomorphisme induit  $u_F$  est une isométrie de  $F$ .

*Démonstration.* Immédiate. □

**Proposition 22.** Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$  et  $F$  sev de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $F^\perp$  est stable par  $u$ .

On commence par énoncer le lemme suivant :

**Lemme 1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie,  $u \in GL(E)$  et  $F$  sev de  $E$  stable par  $u$ . Alors, on a  $u(F) = F$ .

*Démonstration.* On applique le théorème du rang à  $u|_F$  et le résultat suit. □

*Démonstration de la proposition 21.* D'après le lemme, on a donc  $u(F) = F$ . Soit  $(x, y) \in F^\perp \times F$ . Comme  $F = u(F)$ , il existe  $z \in F$  tel que  $y = u(z)$  d'où

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(z) \rangle = \langle x, z \rangle = 0$$

On en déduit  $u(F^\perp) \perp F$  ce qui prouve le résultat attendu.

*Variante.* On peut aussi utiliser le fait que  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ . Comme  $u \in \mathcal{O}(E)$ , on a  $u$  automorphisme avec  $u^* = u^{-1}$  et d'après le lemme, on obtient  $u^{-1}(F^\perp) = F^\perp$  puis  $u(u^{-1}(F^\perp)) = u(F^\perp)$  autrement dit  $F^\perp = u(F^\perp)$ . □

**Remarque :** Les inclusions  $u(F) \subset F$  et  $u(F^\perp) \subset F^\perp$  sont en fait des égalités.

**Théorème 11.** Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que la matrice  $\text{mat}_{\mathcal{B}} u$  soit diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme

$$(1) \quad (-1) \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

*Démonstration.* On procède par récurrence forte sur  $n = \dim E$ . Le cas  $n = 1$  est immédiat et le cas  $n = 2$  résulte de ce qui précède. Supposons le résultat vrai jusqu'à  $n - 1 \geq 2$  fixé. Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$  avec  $\dim E = n$ .

• Si  $u$  admet une valeur propre, on considère  $x$  un vecteur propre normé associé. On a  $u(x) = \lambda x$ . Comme  $F = \text{Vect}(x)$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  également et on applique l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F^\perp$ . On en déduit une base orthonormée pour  $F^\perp$  que l'on complète par  $(x)$ .

• Supposons que  $u$  n'admette pas de valeur propre. Notons  $\mathcal{L}$  une base orthonormée de  $E$  et  $A = \text{mat}_{\mathcal{L}}u$ . Soit  $\lambda$  valeur propre complexe de  $A$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  non nulle telle que  $AX = \lambda X$ . On a  $\text{Im } \lambda \neq 0$  sans quoi, le polynôme  $\chi_A = \chi_u$  aurait une racine réelle ce qui contredit l'hypothèse. On note  $X = X_1 + iX_2$  avec  $X_1 = \text{Re } X$ ,  $X_2 = \text{Im } X$  et  $\lambda = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  réels. La famille  $(X_1, X_2)$  est libre (dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ). En effet, on a  $X$  et  $\bar{X}$  associés à des valeurs propres distinctes d'où  $(X, \bar{X})$  libre (dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ). Pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , il vient

$$\alpha \frac{X + \bar{X}}{2} + \beta \frac{X - \bar{X}}{2i} = 0 \iff \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2i}\right) X + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i}\right) \bar{X} = 0$$

et  $(\alpha - i\beta, \alpha + i\beta) = (0, 0) \iff (\alpha, \beta) = (0, 0)$

Par conséquent, la famille  $(X_1, X_2) = \left(\frac{X + \bar{X}}{2}, \frac{X - \bar{X}}{2i}\right)$  est libre. Or, on a

$$AX = \lambda X \iff AX_1 + iAX_2 = (aX_1 - bX_2) + i(bX_1 + aX_2) \iff \begin{cases} AX_1 = aX_1 - bX_2 \\ AX_2 = bX_1 + aX_2 \end{cases}$$

Ceci prouve l'existence d'un plan vectoriel  $F$  stable par  $u$ . Comme  $F^\perp$  est stable par  $u$ , on applique l'hypothèse de récurrence à  $u_F$  et  $u_{F^\perp}$  et la concaténation des bases donne le résultat souhaité.

*Variante.* On suppose que  $u$  n'admet pas de valeur propre. Le polynôme caractéristique se décompose en produit de facteurs irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  de degré 2. Il existe donc un facteur  $P$  de cette décomposition tel que  $P(u) \notin \text{GL}(E)$ , sinon on aurait  $\chi_u(u) \in \text{GL}(E)$  alors que  $\chi_u(u) = 0$ . Ainsi, il existe  $a, b$  réels et  $x \in E \setminus \{0_E\}$  tels que  $(u^2 + au + b \text{id})(x) = 0$ , c'est-à-dire  $u^2(x) = -bx - au(x)$ . Par conséquent, l'espace  $\text{Vect}(x, u(x))$  est stable par  $u$ . C'est un plan vectoriel car sinon, on aurait  $(x, u(x))$  liée d'où  $u(x) = \lambda x$  avec  $\lambda$  un réel ce qui est exclu. On conclut comme précédemment.  $\square$

**Corollaire 5.** Soit  $E$  euclidien orienté de dimension 3 et  $r \in \mathcal{SO}(E)$ . Alors il existe une base orthonormée directe  $\mathcal{B}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  tels que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* Soit  $r \in \mathcal{SO}(E)$ . D'après le théorème de réduction d'une isométrie, il existe une base  $\mathcal{B}$  orthonormée telle que  $\text{mat}_{\mathcal{B}}r$  est diagonale par blocs, formée de blocs  $(1), (-1)$  ou  $R(\theta)$  avec  $\theta$  réel. Si  $\text{mat}_{\mathcal{B}}r$  est formée de  $(1)$  ou  $(-1)$ , comme  $r \in \mathcal{SO}(E)$ , alors on a  $\text{mat}_{\mathcal{B}}r = I_3$  ou  $\text{mat}_{\mathcal{B}}r = \text{diag}(1, -1, -1)$  quitte à réordonner  $\mathcal{B}$ . Ces cas correspondent aux situations  $\theta \equiv 0 [\pi]$ . Sinon, la matrice  $\text{mat}_{\mathcal{B}}r$  n'est pas diagonale et comme  $r \in \mathcal{SO}(E)$ , on a  $\text{mat}_{\mathcal{B}}r = \text{diag}(1, R(\theta))$  quitte à réordonner  $\mathcal{B}$ . Enfin, quitte à opposer le premier vecteur de cette base, on peut la choisir directe.  $\square$

**Corollaire 6.** Soit  $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ . Il existe  $P \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$  et  $\theta$  réel tel que

$$P^\top AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* Soit  $r \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  canoniquement associée à  $A$  avec  $\mathbb{R}^3$  euclidien orienté (canoniquement). On a  $r \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$  d'où l'existence de  $\theta$  réel et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée directe tels que  $\text{mat}_{\mathcal{B}} r = \text{diag}(1, R(\theta))$ . On pose  $P = \text{mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{B}$ . On a  $P \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$  comme matrice de passage entre deux bases orthonormées directes et par changement de base, on a

$$P^T A P = P^{-1} A P = \text{mat}_{\mathcal{B}} r = \text{diag}(1, R(\theta))$$

□

**Définition 17.** Soit  $E$  euclidien orienté de dimension 3 et  $r \in \mathcal{SO}(E) \setminus \{\text{id}\}$ . Étant donné  $a$  qui engendre  $\text{Ker}(r - \text{id})$ , notant  $\mathcal{B}$  une base orthonormée directe obtenue par complétion de  $(a/\|a\|)$ , on a  $\text{mat}_{\mathcal{B}} r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$  avec  $\theta$  réel et on dit que  $r$  est la rotation d'axe dirigé par  $a$  d'angle  $\theta$  notée  $r = \text{rot}(a, \theta)$ .

**Remarque :** Comme  $r \neq \text{id}$ , on a  $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$  et  $\chi_r = (X - 1)(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$  scindé dans  $\mathbb{C}$  avec 1 racine simple d'où  $\dim E_1(r) = 1$ .

**Illustration :** Soit  $x \in E$ . On décompose  $x = y + z$  avec  $(y, z) \in \text{Ker}(r - \text{id}) \times \text{Ker}(r - \text{id})^\perp$ .

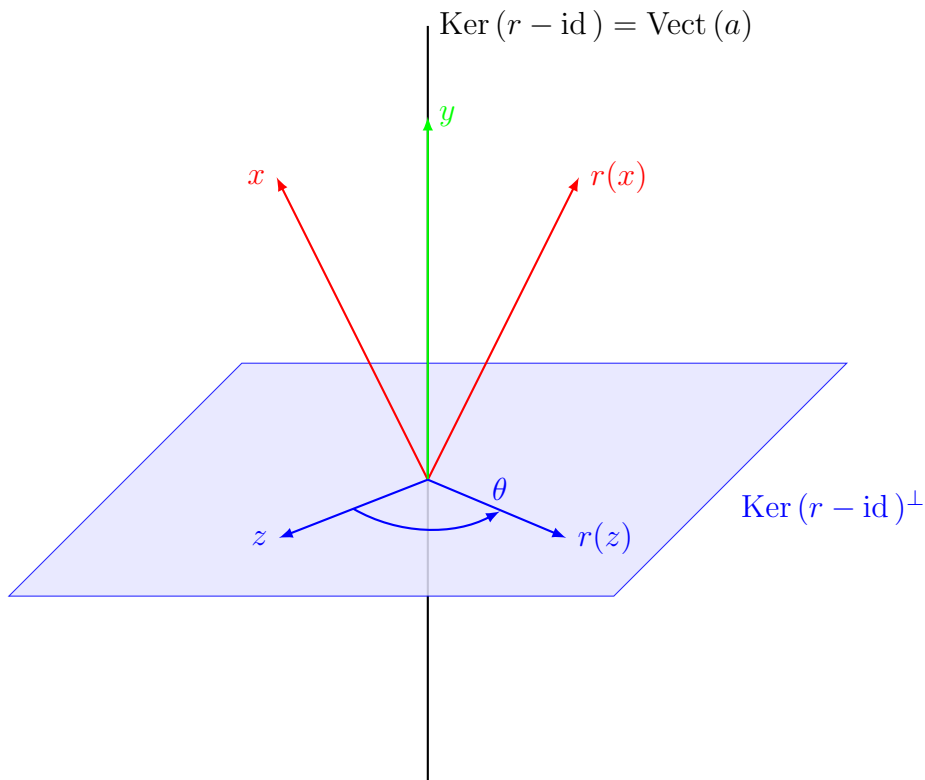


FIGURE 6 – Rotation  $r = \text{rot}(a, \theta)$

**Remarque :** L'axe  $\text{Ker}(r - \text{id})$  et l'angle  $\theta$  ne suffisent pas à caractériser la rotation. En effet, si on prend  $-a$  au lieu de  $a$ , il faut effectuer une rotation d'angle  $-\theta$  pour réaliser la même transformation. D'où la nécessité de préciser un vecteur et un angle pour une rotation donnée.

**Remarque « culturelle » :** Soit  $E = \mathbb{R}^3$  euclidien orienté. On suppose  $a$  normé. On a

$$\forall x \in E \quad r(x) = (1 - \cos(\theta))\langle x, a \rangle a + \cos(\theta)x + \sin(\theta)(a \wedge x)$$

Retrouvons cette formule. Pour  $x \in E$ , on a

$$x = y + z \quad \text{avec} \quad y = \langle x, a \rangle a = p_{\text{Vect}(a)}(x) \quad \text{et} \quad z = x - \langle x, a \rangle a$$

Par suite

$$r(x) = r(y) + r(z) = y + r(z)$$

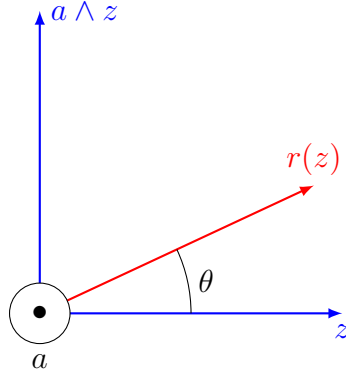


FIGURE 7 – Rotation  $\text{rot}(a, \theta)$

En remarquant que la famille  $(a, z, a \wedge z)$  est orthogonale directe avec  $\|z\| = \|a \wedge z\|$ , on obtient

$$\begin{aligned} r(z) &= \cos(\theta)z + \sin(\theta)(a \wedge z) \\ &= \cos(\theta)(x - \langle x, a \rangle a) + \sin(\theta) [a \wedge (x - \langle x, a \rangle a)] \\ r(z) &= \cos(\theta)(x - \langle x, a \rangle a) + \sin(\theta)(a \wedge x) \end{aligned}$$

## V Endomorphismes auto-adjoints

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite *symétrique* si elle vérifie  $M^\top = M$  ou de manière équivalente  $m_{i,j} = m_{j,i}$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ . On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . L'ensemble  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est un sev de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , par exemple en écrivant  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker } \varphi$  avec  $\varphi : M \mapsto M - M^\top$  clairement linéaire. Pour  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , on peut écrire

$$M = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} \mathbf{E}_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{m_{i,j}}{1 + \delta_{i,j}} \underbrace{(\mathbf{E}_{i,j} + \mathbf{E}_{j,i})}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$$

La famille  $(\mathbf{E}_{i,j} + \mathbf{E}_{j,i})_{1 \leq i \leq j \leq n}$  est donc génératrice de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et est libre donc forme une base de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

### 1 Définition

**Définition 18.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . L'endomorphisme  $u$  est dit auto-adjoint si  $u = u^*$ , c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

**Vocabulaire :** On dit aussi que  $u$  est un *endomorphisme symétrique*.

**Notations :** On note  $\mathcal{S}(E)$  l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints.

**Proposition 23.** L'ensemble  $\mathcal{S}(E)$  est un sev de  $\mathcal{L}(E)$ .



*Démonstration.* L'application  $\Phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E), u \mapsto u - u^*$  est linéaire par linéarité de l'adjonction et  $\mathcal{S}(E) = \text{Ker } \Phi$ .  $\square$

**Proposition 24.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . On a

$$u \in \mathcal{S}(E) \iff \text{mat}_{\mathcal{B}}u \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

*Démonstration.* On a

$$u \in \mathcal{S}(E) \iff \text{mat}_{\mathcal{B}}u = \text{mat}_{\mathcal{B}}u^* \iff \text{mat}_{\mathcal{B}}u = (\text{mat}_{\mathcal{B}}u)^{\top}$$

d'où le résultat.  $\square$

**Remarque :** Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  canoniquement associé à  $S$ . Alors  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  puisque  $\mathcal{C}$  base canonique est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  pour le produit scalaire canonique.

## 2 Propriétés

**Proposition 25.** Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . On a

$$p \text{ projecteur orthogonal} \iff p \in \mathcal{S}(E)$$

*Démonstration.* Soit  $p$  projecteur orthogonal et  $(x, y) \in E^2$ . On a

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) + y - p(y) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$$

expression symétrique en  $x$  et  $y$  d'où le résultat. Supposons  $p \in \mathcal{S}(E)$ . On a

$$\forall (x, y) \in \text{Ker } p \times \text{Im } p \quad \langle x, y \rangle = \langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle = 0$$

d'où le résultat. On a utilisé l'égalité  $\text{Im } p = \text{Ker } (\text{id} - p)$ .  $\square$

**Proposition 26.** Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$  et soient  $\lambda, \mu \in \text{Sp}(u)$  avec  $\lambda \neq \mu$ . On a  $E_{\lambda}(u) \perp E_{\mu}(u)$ .

*Démonstration.* Soit  $(x, y) \in E_{\lambda}(u) \times E_{\mu}(u)$ . On a

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = \mu \langle x, y \rangle \implies \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle x, y \rangle = 0 \implies x \perp y$$

$\square$

**Proposition 27.** Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$  et  $F$  un sev stable par  $u$ . Alors l'endomorphisme induit  $u_F$  est un endomorphisme auto-adjoint de  $F$ .

*Démonstration.* Immédiate.  $\square$

**Proposition 28.** Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$  et  $F$  un sev stable par  $u$ . Alors  $F^{\perp}$  est stable par  $u$ .

*Démonstration.* Conséquence immédiate de la proposition 4.  $\square$

### 3 Théorème spectral

**Théorème 12.** Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ . Alors  $u$  admet une valeur propre.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormale de  $E$  et  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}u$ . On a  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $\lambda$  racine de  $\chi_M$  dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  non nul tel que  $MX = \lambda X$ . En conjuguant puis en multipliant à gauche par  $X^\top$ , on trouve  $X^\top M \bar{X} = \bar{\lambda} X^\top \bar{X}$ . Puis partant de  $MX = \lambda X$ , en transposant puis en multipliant par  $\bar{X}$  à droite, on trouve  $X^\top M \bar{X} = \lambda X^\top \bar{X}$ . Comme  $X^\top \bar{X} > 0$ , il s'ensuit par identification que  $\lambda = \bar{\lambda}$ , autrement dit  $\lambda$  racine réelle de  $\chi_M = \chi_u$  d'où le résultat.  $\square$

**Théorème 13 (Théorème spectral).** Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ . Alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)}^\perp E_\lambda(u)$$

ou, de manière équivalente, il existe une base orthonormée de vecteurs propres de  $u$ .


*Démonstration.* Soit  $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)}^\perp E_\lambda(u)$  sev non réduit à  $\{0_E\}$  d'après le théorème précédent. On vérifie sans difficulté que  $F$  est stable par  $u$ . Supposons  $F^\perp \neq \{0_E\}$ . On a  $F^\perp$  stable par  $u$  et l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F^\perp$  est symétrique donc admet un vecteur propre qui l'est aussi pour  $u$ . On aurait alors  $F \cap F^\perp$  non réduit à  $\{0_E\}$  ce qui est absurde. La décomposition équivaut à l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres de  $u$ . Pour le sens direct, il suffit de considérer une base orthonormée adaptée à la décomposition. Pour le sens indirect, on a la décomposition souhaitée par diagonalisation et celle-ci est orthogonale car  $u$  est auto-adjoint.

*Variante :* On peut aussi procéder par récurrence forte sur  $n = \dim E$ . Par exemple, pour prouver l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres, il suffit de concaténer des bases orthonormées de vecteurs propres pour  $u_F$  et  $u_{F^\perp}$  avec  $F = E_\lambda(u)$  (si  $F = E$  rien à faire), les vecteurs propres pour ces endomorphismes induits étant aussi vecteurs propres pour  $u$ .  $\square$

**Corollaire 7.** Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale telles que

$$A = PDP^\top$$

*Démonstration.* La base canonique  $\mathcal{C}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  (pour le produit scalaire canonique). Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  canoniquement associé à  $A$ . D'après la proposition 24, on a  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de vecteurs propres. On pose alors  $P = \text{mat}_{\mathcal{C}}\mathcal{B}$ , matrice orthogonale en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormées, et le résultat suit d'après les formules de changement de base.  $\square$

 **Avertissement :** Ne pas oublier de mentionner « matrice symétrique **réelle** » pour invoquer le théorème spectral dans sa version matricielle.

**Vocabulaire :** On dit que  $A$  est *orthogonalement semblable* à une matrice diagonale.

# VI Positivité

## 1 Définitions

**Définition 19.** Soit  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{E})$ . L'endomorphisme  $u$  est dit positif si

$$\forall x \in \mathbb{E} \quad \langle u(x), x \rangle \geq 0$$

L'endomorphisme  $u$  est dit défini positif si

$$\forall x \in \mathbb{E} \setminus \{0_{\mathbb{E}}\} \quad \langle u(x), x \rangle > 0$$

**Notations :** On note  $\mathcal{S}^+(\mathbb{E})$  l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs de  $\mathbb{E}$  et  $\mathcal{S}^{++}(\mathbb{E})$  l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs de  $\mathbb{E}$ .

**Définition 20.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La matrice  $M$  est dite positive si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \langle MX, X \rangle \geq 0$$

La matrice  $M$  est dite définie positive si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \quad \langle MX, X \rangle > 0$$

**Notations :** On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques positives et  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

**Remarque :** Le calcul donne  $\langle MX, X \rangle = X^T M X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j m_{i,j}$ .

**Proposition 29.** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $\mathbb{E}$ . On a

$$u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{E}) \iff \text{mat}_{\mathcal{B}} u \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

et

$$u \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{E}) \iff \text{mat}_{\mathcal{B}} u \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

*Démonstration.* On sait que  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{E}) \iff \text{mat}_{\mathcal{B}} u \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . L'équivalence pour le caractère positif ou défini positif est immédiate puisque pour  $x \in \mathbb{E}$ , notant  $X = \text{mat}_{\mathcal{B}} x$  et  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}} u$ , on a

$$\langle u(x), x \rangle = \langle X, MX \rangle$$

□

## 2 Propriétés

Les résultats qui suivent sont déclinés vectoriellement mais existent à l'identique en version matricielle.

**Proposition 30.** Soit  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{E})$ ,  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormée de vecteurs propres de  $u$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (répétées avec multiplicité) et  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{E}$ . On a

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Avec  $\mathbb{E} = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$  et  $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} x_{\lambda}$  la décomposition associée, on a

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda \|x_{\lambda}\|^2$$

*Démonstration.* On a

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \langle u(e_i), e_j \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_i x_i y_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Avec la décomposition orthogonale  $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} x_\lambda$ , il vient

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{(\lambda, \mu) \in \text{Sp}(u)^2} \langle u(x_\lambda), x_\mu \rangle = \sum_{(\lambda, \mu) \in \text{Sp}(u)^2} \underbrace{\lambda \langle x_\lambda, x_\mu \rangle}_{=0 \text{ si } \lambda \neq \mu} = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda \|x_\lambda\|^2$$

□

**Remarque :** Pour la version matricielle, on considère  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^\top M P = D$  diagonale. Ainsi, pour  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  avec  $X = P Y$ , on a

$$\langle M X, X \rangle = X^\top M X = Y^\top D Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

**Théorème 14.** Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ . On a

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \text{Sp}(u) \subset [0; +\infty[$$

et

$$u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \text{Sp}(u) \subset ]0; +\infty[$$

*Démonstration.* Pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  et  $x \in E_\lambda(u)$  qu'on choisit normé, il vient

$$\langle u(x), x \rangle = \lambda \geq 0 \text{ si } u \in \mathcal{S}^+(E) \quad \text{et} \quad > 0 \text{ si } u \in \mathcal{S}^{++}(E)$$

Réciproquement, si  $\text{Sp}(u) \subset [0; +\infty[$ , l'expression obtenue à la proposition 30 permet d'établir  $\langle u(x), x \rangle \geq 0$  pour  $x \in E$ . Si  $\text{Sp}(u) \subset ]0; +\infty[$  et  $x \in E \setminus \{0_E\}$ , une de ces coordonnées  $x_i$  est non nulle et on en déduit  $\langle u(x), x \rangle > 0$ . □

**Théorème 15 (À savoir refaire).** Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$  et  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  les valeurs propres de  $u$ .

On a 
$$\forall x \in E \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$$

et si une des inégalités est une égalité avec  $x$  non nul, alors  $x$  est vecteur propre.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  base orthonormée de vecteurs propres associés à  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et  $x \in E$  avec  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et les  $x_i$  réels et aussi  $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} x_\lambda$  avec  $x_\lambda \in E_\lambda(u)$  pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ . D'après la première expression obtenue dans la proposition 30, on a

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

et  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  d'où l'encadrement. Supposons  $\langle u(x), x \rangle = \lambda_n \|x\|^2$ . Comme  $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \|x_\lambda\|^2$  d'après le théorème de Pythagore, il vient avec la deuxième expression de la proposition 30

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u) \setminus \{\lambda_n\}} \underbrace{(\lambda - \lambda_n)}_{< 0} \|x_\lambda\|^2 = 0 \iff x = x_{\lambda_n} \in E_{\lambda_n}(u)$$

On fait de même pour le cas d'égalité concernant  $\lambda_1$ . □

# Annexe

## Génération aléatoire d'une matrice orthogonale

On présente en langage python un procédé pour générer aléatoirement une matrice orthogonale.

La fonction `ps(A,B)` d'arguments `A`, `B` deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  renvoie  $\langle A, B \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$  et la fonction `isortho(A)` d'argument `A` une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  renvoie `True` si la matrice `A` est orthogonale et `False` sinon.

```
def ps(A,B):
    return np.trace(A.T.dot(B))

def isortho(A):
    eps=1e-8
    B=A.T.dot(A)-np.eye(len(A))
    return ps(B,B)<eps
```

On rappelle l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

---

### Algorithme 1 : Orthonormalisation

---

**Entrées :**  $[u_1, \dots, u_p]$  libre

**Résultat :**  $[v_1, \dots, v_p]$  orthonormée

$res \leftarrow [u_1 / \|u_1\|]$

**pour**  $k \in \llbracket 2; p \rrbracket$  **faire**

$z \leftarrow u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, v_i \rangle v_i$   
 $res \leftarrow res + [z / \|z\|]$

**retourner**  $res$

---

Dans l'algorithme, l'étape itérative consiste à construire  $z_k = u_k - p_{F_k}(u_k)$  où

$$F_k = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k-1})$$

Ainsi, on a  $v_k = \frac{z_k}{\|z_k\|} \in F_k^\perp$  d'où  $v_k \perp v_i \quad \forall i \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket$

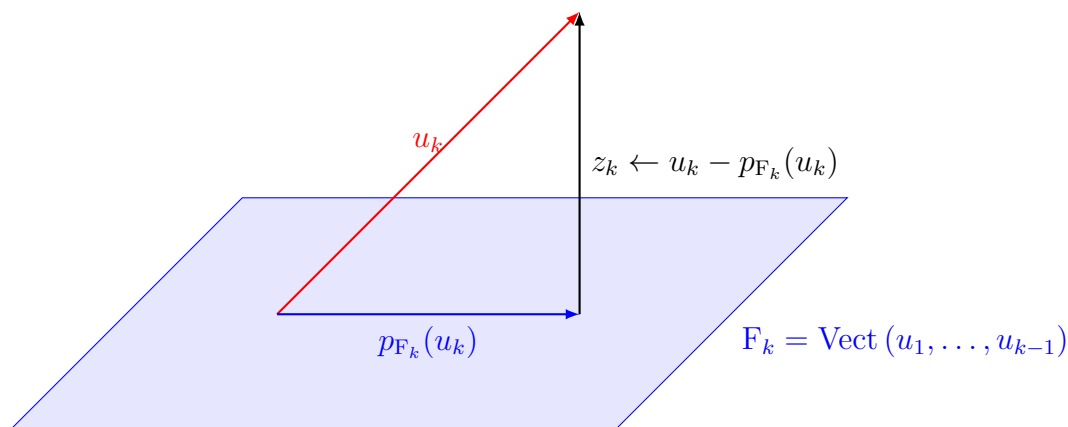


FIGURE 8 – Étape itérative de l'algorithme d'orthonormalisation

Une implémentation de l'algorithme est donnée par :

```
def norm(u):
    # normalise le vecteur u
    return u/alg.norm(u)

def ortho(A):
    # Renvoie la matrice constituée des colonnes orthonormalisées
    # à partir des colonnes de la matrice A
    p=A.shape[1]
    v=[norm(A[:,0])]
    for k in range(1,p):
        u=A[:,k]
        z=u-sum([np.dot(v[i],u)*v[i] for i in range(k)])
        v.append(norm(z))
    return np.array(v).T
```

On remarque que l'implémentation d'une fonction de *normalisation* qui prend un vecteur en entrée et le normalise rend la fonction `ortho` très lisible avec une écriture assez légère.

On applique l'algorithme d'orthonormalisation aux colonnes d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  de rang égal à  $p$  (avec  $p \leq n$ ) transmise en argument. Si  $p = n$ , la famille orthonormalisée  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, on peut facilement générer aléatoirement une matrice orthogonale par orthonormalisation d'une matrice tirée aléatoirement dans  $GL_n(\mathbb{R})$  :

```
>>> A=rd.rand(3,3)
>>> B=ortho(A)
>>> np.dot(B.T,B)
array([[ 1.00000000e+00,  5.05754733e-15, -8.89543056e-15],
       [ 5.05754733e-15,  1.00000000e+00, -1.03875092e-15],
       [-8.92318613e-15, -1.03875092e-15,  1.00000000e+00]])
>>> isortho(B)
True
```