ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Programme de colles

⚠ Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 13 **13/01/25 - 17/01/25**

Programme :

Espaces préhilbertiens réels :
- Produit scalaire, norme euclidienne, identités de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, la norme euclidienne est une norme ;
- Vecteurs orthogonaux, liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls, théorème de Pythagore, orthogonal d'une partie, propriétés de l'orthogonal d'une partie, sev orthogonaux, orthogonal d'une famille génératrice, cas de deux sev dont la somme vaut l'espace et qui sont orthogonaux ;
- Famille orthonormale, liberté, orthonormalisation de Gram-Schmidt, bases orthonormales, formules matricielles dans un espace euclidien muni d'une base orthonormale ;
- Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie, projection orthogonale sur un sev de dimension finie, caractérisation géométrique du projeté orthogonal, formule du projeté orthogonal avec une base orthonormée du sev de dimension finie, inégalité de Bessel, projecteur orthogonal, caractérisation d'un projecteur orthogonal en tant que projecteur 1-lipschitzien, caractérisation métrique du projeté orthogonal ;
- Exemples « culturels » : distance à un hyperplan dans un espace euclidien, droite des moindres carrées.

Dans un espace E euclidien (début) :
- Théorème de représentation de Riesz, existence et unicité de l'adjoint, linéarité et involution de l'adjonction, adjoint d'une composée, adjonction et inversibilté, matrice de l'adjoint dans une base orthonormée, stabilité par l'adjoint de l'orthogonal d'un sev stable ;
- Isométrie vectorielle, conservation du produit scalaire, caractérisation d'une isométrie avec l'image d'une base orthonormée, caractérisation d'une isométrie comme automorphisme dont l'inverse est l'adjoint, spectre d'une isométrie, groupe orthogonal $\mathcal{O}(\mathrm{E})$, isométrie directe et indirecte, sous-groupe groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$;
- Symétrie orthogonale, projecteur associé, caractérisation d'une symétrie orthogonale comme isométrie parmi les symétries, réflexion orthogonale ;
- Matrices orthogonales, inversibilité et inverse, caractérisation d'une matrice orthogonale avec les lignes ou colonnes comme base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, matrice de passage entre deux bases orthonormées, groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, sous-groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, caractérisation d'une isométrie avec sa matrice dans une base orthonormée ;
- Orientation entre bases, espace orienté, bases directes et indirectes ;
- Groupe $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, description de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$, groupe commutatif $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$, rotation dans un espace euclidien orienté de dimension 2, réduction dans une base orthonormée des éléments de $\mathcal{O}_2^-(\mathrm{E})$ avec E euclidien de dimension 2 ;

— isométrie induite sur un sev stable, stabilité de l'orthogonal d'un sev stable ; Réduction dans une base orthonormée d'une isométrie de E euclidien de dimension n, cas particulier dans $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ avec E euclidien orienté de dimension 3 puis définition d'une rotation de E, corollaire matriciel.

Questions de cours : (avec preuve)

1. Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie et corollaire pour l'orthogonal de l'orthogonal ;
2. Contre-exemple en dimension infinie où $\mathrm{F}\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{F}^{\perp} \neq \mathrm{E}$ et $\mathrm{F} \subsetneq (\mathrm{F}^{\perp})^{\perp}$;
3. Caractérisation géométrique du projeté orthogonal (dessin obligatoire) ;
4. Formule de $p_{\mathrm{F}}(x)$ avec $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$ où $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormée ;
5. Caractérisation d'un projecteur orthogonal en tant que projecteur 1-lipschitzien ;
6. Caractérisation métrique du projeté orthogonal (dessin obligatoire) ;
7. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, pour $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$, détermination de $p_{\mathrm{F}}(1)$ puis $\mathrm{d}(1, \mathrm{F})$ (dessin obligatoire) ;
8. Distance à un hyperplan dans un espace euclidien ;
9. Théorème de représentation de Riesz ;
10. Existence et unicité de l'adjoint ;
11. Caractérisation d'une isométrie avec l'image d'une base orthonormée ;
12. Caractérisation d'une symétrie orthogonale comme isométrie parmi les symétries (dessin obligatoire) ;
13. Caractérisation d'une matrice orthogonale avec les lignes ou colonnes comme base orthonormée de $\mathbb{R}^n$;
14. Une matrice de passage entre une base orthonormée et une famille de même cardinal est orthogonale si et seulement si la base d'arrivée est orthonormée ;
15. Caractérisation d'une isométrie avec sa matrice dans une base orthonormée.