# Préparation à l'interrogation n°14

## 1 Croissances comparées

Soient $\alpha$, $\beta > 0$. On a

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad x^\beta \mathrm{e}^{-\alpha x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad x^\alpha \ln(x)^\beta \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

## 2 Trigonométrie

1. $\sin a \cos b = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$
2. $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$

## 3 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
2. $\displaystyle\int^x \mathrm{th}\ t \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$

## 4 Continuité, compacité, connexité

1. Caractérisation de la continuité d'une application $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ;
2. Pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec E de dimension finie, l'application $u$ est continue ;
3. Théorème des bornes atteintes, théorème de Heine ;
4. Image directe d'un compact ou d'un connexe par arcs par une application continue ;
5. Résultats de compacité en dimension finie.

## 5 Réduction

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. On a

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable } &\iff \mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u) \\ &\iff \dim \mathrm{E} = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \\ &\iff \chi_u \text{ scindé et } \forall\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \dim \mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda(u) \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable } &\iff \pi_u \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \exists \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \text{ scindé à racines simples et annulateur de } u \end{aligned}$$

## 6 Exercice type - Matrice de Gram

Soit E préhilbertien réel, $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ et $\mathrm{G} = \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ puis l'équivalence

$$\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff (u_1, \ldots, u_n) \text{ libre}$$

**Corrigé :** On a clairement $\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on trouve

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{G}\mathrm{X} = \|\sum_{i=1}^n x_i u_i\|^2 \geqslant 0$$

Si $(u_1, \ldots, u_n)$ libre, on a $\sum_{i=1}^n x_i u_i \neq 0_\mathrm{E}$ pour $\mathrm{X} \neq 0$ d'où $\mathrm{X}^\top\mathrm{G}\mathrm{X} > 0$. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ liée, il existe $\mathrm{X} \neq 0$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0_\mathrm{E}$ d'où $\mathrm{X}^\top\mathrm{G}\mathrm{X} = 0$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff (u_1, \ldots, u_n) \text{ libre}}$$

## 7 Exercice type

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$. Montrer qu'il existe un unique $g \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ tel que $f = g^2$.

**Corrigé :** Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de diagonalisation de $f$ (une telle base existe d'après le théorème spectral). On a $f(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ avec $\lambda_i \geqslant 0$. On définit $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ par $g(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$. On a $f$ et $g^2$ qui coïncident sur une base d'où $f = g^2$ et $g \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ puisque $\mathrm{mat}_\mathscr{B} g \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrons l'unicité d'un tel endomorphisme. Soit $h \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ tel que $f = h^2$. Comme $f$ est un polynôme en $h$, alors $f$ et $h$ commutent. Par suite, les sous-espaces propres de $f$ sont stables par $h$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)$, on note $\mathrm{E}_\lambda$ le sous-espace propre de $f$ pour la valeur propre $\lambda$ et $h_\lambda$ l'endomorphisme induit par $g$ sur $\mathrm{E}_\lambda$. On a clairement $h_\lambda \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E}_\lambda)$ et $h_\lambda^2 = \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}_\lambda}$ d'où $(\mathrm{X}^2 - \lambda)$ annulateur de $h_\lambda$. D'après le théorème spectral, l'endomorphisme $h_\lambda$ est diagonalisable avec $\sqrt{\lambda}$ comme unique valeur propre possible (car $-\sqrt{\lambda} \leqslant 0$) ce qui prouve que $h_\lambda = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}_\lambda}$. Comme $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)} \mathrm{E}_\lambda$, l'endomorphisme $h$ est donc caractérisé et on conclut

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E}) \qquad \exists! g \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E}) \quad | \quad f = g^2}$$

## 8 Exercice type

Feuille 53 Exercice 3.

## 9 Questions de cours

Espaces euclidiens, développements en série entière usuels, graphes usuels.