ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 06/01/25

Concours blanc - Mathématiques - 4h

⚠ **Les calculatrices ne sont pas autorisées.**

Le terme « entier » désigne un entier naturel.

L'objectif de ce problème est l'étude d'un opérateur de Volterra appliqué notamment à la résolution de certaines équations différentielles.

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0\left(\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$. On pose

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

puis pour $f \in \mathrm{E}$

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \mathrm{V}(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{V}^*(f)(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

I Opérateur de Volterra

1 . Justifier que l'application $\mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Soit $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. L'endomorphisme T est dit *symétrique défini positif* si

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \mathrm{T}(f), g\rangle = \langle f, \mathrm{T}(g)\rangle$$

et

$$\forall f \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\} \qquad \langle \mathrm{T}(f), f\rangle > 0$$

2 . Soit $f \in \mathrm{E}$. Justifier que les fonctions $\mathrm{V}(f)$ et $\mathrm{V}^*(f)$ sont bien définies, de classe $\mathscr{C}^1$ et préciser leurs dérivées puis justifier que V et V^* sont des endomorphismes de E.

3. Établir $$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \mathrm{V}(f), g\rangle = \langle f, \mathrm{V}^*(g)\rangle$$

4. Montrer $$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f), g\rangle = \langle \mathrm{V}(f), \mathrm{V}(g)\rangle$$

En déduire que l'endomorphisme $\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}$ est symétrique défini positif puis que ses valeurs propres sont strictement positives.

Pour λ réel, on note (S_λ) le système

$$(\mathrm{S}_\lambda) : \begin{cases} y'' + \dfrac{1}{\lambda} y = 0 \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

5. Montrer $$\operatorname{Im} \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V} \subset \left\{ f \in \mathscr{C}^2\left(\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right),\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'(0) = 0 \right\}$$

6 . Soit λ valeur propre de $V^* \circ V$ et f_λ vecteur propre associé à λ. Montrer que f_λ est de classe $\mathscr{C}^2$ et est solution du système (S_λ).

7 . Soit $\lambda > 0$. Montrer que le système (S_λ) admet une solution non nulle si et seulement s'il existe n entier tel que $\lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et préciser alors l'ensemble des solutions de (S_λ).

8 . Pour λ réel, montrer que λ est valeur propre de $V^* \circ V$ si et seulement s'il existe n entier tel que $\lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et préciser alors l'espace propre associé.

II Théorème d'approximation de Weierstrass

Soit n entier non nul et $f \in \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(x)$ avec $x \in [0\,;1]$. On note

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad B_n(f)(x) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$$

9 . Rappeler, sans démonstration, la loi de S_n. En déduire, avec démonstration, les valeurs de $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$ en fonction de n et x.

10. Montrer $$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)$$

11. Pour $\alpha > 0$, établir $$\sum_{k \in [\![0\,;n]\!], \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

Pour $\alpha > 0$, on note

$$T_{n,\alpha} = \sum_{k \in [\![0\,;n]\!], \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \quad \text{et} \quad U_{n,\alpha} = B_n(f)(x) - f(x) - T_{n,\alpha}$$

12 . Pour $\delta > 0$, justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [0\,;1] \qquad |B_n(f)(x) - f(x)| = |T_{n,\alpha} + U_{n,\alpha}| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} + \delta$$

En déduire $$B_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CU}} f$$

ce qui prouve le cas particulier du théorème de Weierstrass sur le segment $[0\,;1]$.

13 . Généraliser le théorème de Weiestrass sur un segment quelconque $[a\,;b]$.

III Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

On considère maintenant l'espace $G = \mathscr{C}^0([0\,;\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\forall (f,g) \in G^2 \qquad \langle f, g \rangle_G = \int_0^\pi f(t)g(t)\,dt$$

On note $\|\cdot\|_G$ la norme euclidienne associée.

Pour n entier, on définit $c_n \in \mathrm{G}$ par $c_n(t) = \cos(nt)$ pour $t \in [\,0\,;\pi\,]$ et $\mathrm{F}_n = \mathrm{Vect}\,(c_0, \ldots, c_n)$. On pose $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

14 . Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Établir $\mathrm{P} \circ \cos \in \mathrm{F}$.

15 . Déterminer une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que la suite $(\alpha_n c_n)_n$ soit orthonormée.

16 . À l'aide du théorème d'approximation de Weierstrass, établir que le sev F est dense (pour la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{G}}$)) dans G.

17 . Soit $f \in \mathrm{G}$. Justifier la décroissance de la suite $(\|f - p_{\mathrm{F}_n}(f)\|_{\mathrm{G}})_{n\in\mathbb{N}}$ puis établir

$$\|f - p_{\mathrm{F}_n}(f)\|_{\mathrm{G}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

18 . Soit $f \in \mathrm{G}$. Si la suite $(p_{\mathrm{F}_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur $[\,0\,;\pi\,]$, montrer l'égalité $f = g$.

Pour $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on définit la fonction g_x sur $[\,0\,;\pi\,]$ par la formule

$$\forall t \in [\,0\,;\pi\,] \qquad g_x(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \max(x,t) & \text{si } t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \\ -g_x(\pi - t) & \text{sinon} \end{cases}$$

19 . Vérifier que $g_x \in \mathrm{G}$.

20 . Soit n entier. Déterminer les coordonnées de $p_{\mathrm{F}_n}(g_x)$ sur la base $(\alpha_0 c_0, \ldots, \alpha_n c_n)$ de F_n.

22 . En déduire

$$\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{\pi}{2} - \max(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)$$

23 . Pour $f \in \mathrm{E}$ et $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, montrer

$$\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \max(x,t)\right) f(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire la suite des coefficients $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle on a

$$\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\cos((2n+1)x)$$

IV Équation différentielles du type Sturm-Liouville

Soit $h \in \mathrm{E}$ et λ réel. On note (S) le système

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} y'' + \lambda y + h = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Pour n entier, on définit $\varphi_n \in \mathrm{E}$ par

$$\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \varphi_n(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos((2n+1)t)$$

24 . Soit $f \in \mathrm{E}$ et n entier. Montrer

$$\langle \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f), \varphi_n \rangle = \frac{1}{(2n+1)^2} \langle f, \varphi_n \rangle$$

25 . Soit $g \in \mathscr{C}^2\left(\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$. Montrer l'équivalence

$$g \text{ est solution du système (S)} \iff g = \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(\lambda g + h)$$

26 . Soit $g \in \mathscr{C}^2\left(\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$ avec g solution de (S). Établir

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right) \langle g, \varphi_n \rangle = \frac{1}{(2n+1)^2} \langle h, \varphi_n \rangle$$

et

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, \varphi_n \rangle \, \varphi_n(x)$$

27 . On suppose dans cette question que λ n'est pas égal au carré d'un entier impair. Montrer que la série

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \, \varphi_n$$

est normalement convergente. Exhiber alors une solution de (S).

28 . On suppose $\lambda = (2p+1)^2$ avec p entier. Que peut-on dire si $\langle h, \varphi_p \rangle \neq 0$? Montrer que si $\langle h, \varphi_p \rangle = 0$, alors le système (S) admet une infinité de solutions et exhiber l'une d'entre elles.