Devoir en temps libre n°11

Problème I

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de structure euclidienne canonique et $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\|\mathrm{M}\|$ pour $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose $1 \notin \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$. Étudier la convergence de $\dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k$ pour $p \to +\infty$.
3. Montrer $$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)$$
4. Étudier la convergence de $\dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k$ pour $p \to +\infty$.
5. On suppose $1 \notin \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$. La suite $(\mathrm{A}^k)_k$ est-elle convergente ?
   On pourra s'intéresser à la suite $(\mathrm{A}^{k+1})_k$.

Problème II

Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme u de E est dit *antiysymétrique* si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$$

1. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer
$$u \text{ antisymétrique} \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$
   Dans ce qui suit, on suppose que l'endomorphisme u est antisymétrique.
2. Soit F sev de E stable par u. Établir que le sev $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u.
3. On suppose u inversible.
   (a) Soit $\mathscr{L}$ une base orthonormée de E et $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{L}} u$. Établir $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{i}\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   (b) Montrer qu'il existe F plan vectoriel stable par u.
   (c) Montrer qu'il existe $\mathscr{B}$ base orthonormée de E telle que
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \mathrm{diag}(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p) \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1\,;\, p]\!] \qquad \mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a_i \in \mathbb{R}^*$$
4. Établir $$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\; u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\; u$$
5. Justifier que $\mathrm{Im}\; u$ est stable par u puis, notant $v = u_{\mathrm{Im}\; u}$ l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}\; u$, montrer que l'endomorphisme v est antisymétrique et que $v \in \mathrm{GL}(\mathrm{Im}\; u)$.
6. Généraliser le résultat établi à la question 3.(c).

Problème III (bonus)

Soit n entier non nul. On note d_n la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments non nuls sont inversibles.

1. Justifier l'inégalité $$d_n \geqslant 1$$

2. Montrer l'inégalité $$d_n \leqslant n$$

   On pourra considérer l'application C_1 qui à une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{F}$ associe sa première colonne avec F sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{F} \setminus \{0\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

3. Si n est impair, montrer que $d_n = 1$.

4. Déterminer d_4. On pourra considérer l'ensemble

$$\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix},\ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

   et munir $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.