ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°49

Exercice 1 (*)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \mathrm{th}\,(n) z^n$
2. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}} z^n$
3. $\sum_{n\geqslant 1} \ln(n) z^n$
4. $\sum \mathrm{e}^{-n^2} z^n$
5. $\sum \ln(\mathrm{ch}\,(n)) z^n$
6. $\sum \ln(\mathrm{th}\,(n)) z^n$

Corrigé : 1. On a $\mathrm{th}\,(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ d'où $\sum \mathrm{th}\,(n) z^n$ de même rayon que $\sum z^n$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

2. On a $\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Par application de la règle de d'Alembert, on conclut

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

Variantes : (a) On a
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1$$

Notant R_1, R et R_2 les rayons respectifs de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum z^n$, on a $\mathrm{R}_1 \geqslant \mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_2$ et par ailleurs, on a $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = 1$ d'où le résultat.
(b) Par croissance comparées, on a pour $r \geqslant 0$

$$\frac{r^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1) \iff r \leqslant 1$$

et on retrouve $\mathrm{R} = 1$.

3. On a
$$\forall n \geqslant 3 \qquad 1 \leqslant \ln(n) \leqslant n - 1 \leqslant n$$
la deuxième inégalité s'obtenant par concavité de ln. Notant R_1, R et R_2 les rayons respectifs de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$, $\sum_{n\geqslant 1} \ln(n) z^n$ et $\sum z^n$, on a $\mathrm{R}_1 \geqslant \mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_2$ et par ailleurs, on a $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = 1$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

Variante : On observe
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$
et le résultat suit par application de la règle de d'Alembert.

4. Pour $r > 0$, on a
$$\mathrm{e}^{-n^2} r^n = \mathrm{e}^{-n^2 + n\ln(r)} = \mathrm{e}^{-n^2(1+\mathrm{o}(1))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
Ainsi, la suite $\left(\mathrm{e}^{-n^2} r^n\right)_n$ est bornée pour tout $r \geqslant 0$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R} = +\infty}$$

Variante : Avec
$$\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)^2}}{\mathrm{e}^{-n^2}} = \mathrm{e}^{-2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et par application de la règle de d'Alembert, on trouve $\mathrm{R} = +\infty$.

5. On a $$\ln(\mathrm{ch}\,(n)) = \ln\left(\mathrm{e}^{n}\frac{1+\mathrm{e}^{-2n}}{2}\right) = n + \mathrm{O}(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

Ainsi, les séries $\sum \ln(\mathrm{ch}\,(n))z^n$ et $\sum nz^n$ ont même rayon de convergence d'où

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

6. On a $$\ln(\mathrm{th}\,(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{th}\,(n) - 1 = \frac{-2\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^{n}+\mathrm{e}^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\mathrm{e}^{-2n}$$

Ainsi, les séries $\sum \ln(\mathrm{th}\,(n))z^n$ et $\sum \mathrm{e}^{-2n}z^n$ ont même rayon de convergence et pour $r \geqslant 0$, on a $\mathrm{e}^{-2n}r^n = \mathrm{O}(1)$ si et seulement si $r \leqslant \mathrm{e}^2$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R} = \mathrm{e}^2}$$

Exercice 2 (**)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})z^n$
2. $\sum \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) z^n$
3. $\sum \ln(n!)z^n$
4. $\sum z^{n^2}$
5. $\sum 2^n z^{3n}$
6. $\sum \frac{1}{\binom{2n}{n}} z^{2n}$

Corrigé : 1. On a

$$\begin{aligned}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\ &= \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n\frac{\pi}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

D'où $$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n\frac{\pi}{2n}$$

Ainsi, les séries $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ ont même rayon de convergence (le facteur $(-1)^n\frac{\pi}{2}$ n'influe pas sur le caractère borné) et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

2. On a $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant n$$

Notant R_1, R et R_2 les rayons respectifs de $\sum z^n$, $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)z^n$ et $\sum nz^n$, on a $\mathrm{R}_1 \geqslant \mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_2$ et par ailleurs, on a $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = 1$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

3. On a $$\forall n \geqslant 3 \qquad 1 \leqslant \ln(n!) = \sum_{k=1}^{n}\ln(k) \leqslant n\ln(n) \leqslant n^2$$

Notant R_1, R et R_2 les rayons respectifs de $\sum z^n$, $\sum \ln(n!)z^n$ et $\sum n^2 z^n$, on a $\mathrm{R}_1 \geqslant \mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_2$ et par ailleurs, on a $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = 1$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

4. Soit $r \geqslant 0$. On a $r^{n^2} = \mathrm{O}(1)$ si et seulement si $r \leqslant 1$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

5. Soit $r \geqslant 0$. On a $$2^n r^{3n} = \mathrm{O}(1) \iff 2r^3 \leqslant 1 \iff r \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{R} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$$

6. Soit $r > 0$ et $u_n = \dfrac{r^{2n}}{\binom{2n}{n}}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2(2n+1)} r^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{r^2}{4}$$

On utilise ensuite le critère de d'Alembert. Si $r^2/4 < 1$ ce qui équivaut à $r < 2$, la série converge absolument d'où $\mathrm{R} \geqslant 2$. Si $r^2/4 > 1$ ce qui équivaut à $r > 2$, la série diverge grossièrement d'où $\mathrm{R} \leqslant 2$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{R} = 2}$$

Exercice 3 (*)

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum n x^n$ 2. $\sum (n+1) x^{2n}$ 3. $\sum n^2 x^n$

Corrigé : 1. Les séries $\sum n x^n$ et $\sum x^n$ ont même rayon de convergence égal à 1. Par dérivation d'une série entière, on a pour $x \in \,]-1\,;1\,[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right] = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{1-x}\right]$$

Ainsi $$\boxed{\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{x}{(1-x)^2}}$$

2. Pour $r \geqslant 0$, on a $(n+1) r^{2n} = \mathrm{O}(1)$ si et seulement si $r < 1$ par croissances comparées. On en déduit un rayon de convergence égal à 1. Puis, on considère

$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{T}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n \quad \text{et} \quad \mathrm{U}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Alors $$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = (\mathrm{T} + \mathrm{U})(x^2)$$

Avec le résultat de la question précédente, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)^2}}$$

3. La série $\sum n^2 x^n$ a même rayon de convergence que $\sum x^n$ c'est-à-dire 1. On pose

$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n \quad \text{et} \quad \mathrm{T}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Par dérivation de série entière, on trouve

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n\right] = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right]\right] = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]$$

Ainsi $$\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}}$$

Exercice 4 (**)

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum \mathrm{sh}\,(n)x^n$
2. $\sum \dfrac{x^n}{n(n+1)}$
3. $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$
4. $\sum \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) x^n$

Corrigé : 1. On a $\mathrm{sh}\,(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^n}{2}$ et on en déduit un rayon de convergence égal à e^{-1}. On pose

$$\forall x \in \left]-\mathrm{e}^{-1}\,;\mathrm{e}^{-1}\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{sh}\,(n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{2}x^n$$

Les séries entières $\sum \mathrm{e}^n x^n$ et $\sum \mathrm{e}^{-n}x^n$ ont pour rayons de convergence respectifs e^{-1} et e puisque pour $r \geqslant 0$

$$\mathrm{e}^n r^n = \mathrm{O}(1) \iff \mathrm{e}\,r \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-n}r^n = \mathrm{O}(1) \iff \mathrm{e}^{-1}r \leqslant 1$$

Par linéarité du symbole somme car convergence (absolue) sur $\left]-\mathrm{e}^{-1}\,;\mathrm{e}^{-1}\right[$, il vient

$$\forall x \in \left]-\mathrm{e}^{-1}\,;\mathrm{e}^{-1}\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n}x^n\right)$$

Ainsi $$\boxed{\forall x \in \left]-\mathrm{e}^{-1}\,;\mathrm{e}^{-1}\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}\,x} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}x}\right)}$$

2. On a $\dfrac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ et $\sum x^n$ ont même rayon de convergence d'où un rayon égal à 1. On pose

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

On observe $$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] x^n$$

Les série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n+1}$ ont même rayon de convergence égal à 1. Ainsi, par linéarité du symbole somme

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\setminus \{0\} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right)$$

On conclut $$\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \begin{cases} -\ln(1-x) + \dfrac{\ln(1-x)}{x} + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

3. On a $$\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par application du critère de d'Alembert, on trouve un rayon de convergence égal à $+\infty$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

Pour $x \geqslant 0$, on a $\qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{S}\left(\sqrt{x}^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}\,(\sqrt{x})$

Pour $x \leqslant 0$, on a $\qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{S}\left(-\sqrt{-x}^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\sqrt{-x}\right)$

Ainsi $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \begin{cases} \mathrm{ch}\,(\sqrt{x}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$$

4. On a $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant n$$

Notant R_1, R et R_2 les rayons respectifs de $\sum z^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) z^n$ et $\sum n z^n$, on a $\mathrm{R}_1 \geqslant \mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_2$ et par ailleurs, on a $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = 1$ d'où $\mathrm{R} = 1$. Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum x^n$ ont un rayon de convergence égal à 1 et d'après le théorème du produit de Cauchy

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

Ainsi $$\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}}$$

Exercice 5 (*)

Justifier que les fonctions suivantes se prolongent se prolongent en fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$:

1. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$
2. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$
3. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}\,(x) - 1}{x^2}$

Corrigé : 1. On a le développement en série entière usuel

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Ainsi $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme la fonction φ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est le prolongement } \mathscr{C}^\infty \text{ de } x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}.}$$

2. On a le développement $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

d'où
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^x - 1 = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

On pose
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme la fonction φ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est le prolongement } \mathscr{C}^\infty \text{ de } x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}.}$$

3. On a le développement $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

d'où
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}\,(x) - 1 = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!}$$

On pose
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!}$$

Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}\,(x) - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme la fonction φ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est le prolongement } \mathscr{C}^\infty \text{ de } x \mapsto \frac{\mathrm{ch}\,(x) - 1}{x^2}.}$$

Exercice 6 (**)

Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser les rayons de convergence :

1. $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$ 2. $x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ 3. $x \mapsto \sin(x)\mathrm{e}^x$

Corrigé : 1. Par trigonométrie, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin(x)\cos(2x) &= \frac{1}{2}\left[\sin(3x) - \sin(x)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \end{aligned}$$

Et par linéarité du symbole somme, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin(x)\cos(2x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1} - 1}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

2. Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$ (intervalle déterminé *a posteriori*), on a

$$\ln(x^2+x+1) = \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x)$$

Avec le développement usuel $-\ln(1-u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$ pour $u \in \left]-1\,;1\right[$, on obtient

$$\ln(x^2+x+1) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{3n} x^{3n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Par linéarité du symbole somme, on trouve

$$\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \ln(x^2+x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} x^n \quad \text{avec} \quad a_{3n+1} = a_{3n+2} = 1 \quad \text{et} \quad a_{3n} = -2}$$

3. On a $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin(x)\mathrm{e}^x = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n x^n}{n!}\right)$

Avec l'écriture trigonométrique $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin(x)\mathrm{e}^x = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}}{n!} x^n\right)$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin(x)\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n!} x^n}$

Exercice 7 (**)

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1. Déterminer son rayon de convergence R. On notera S sa somme sur $\left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ si $\mathrm{R} > 0$.
2. Étudier $\lim_{x\to\mathrm{R}} \mathrm{S}(x)$.

Corrigé : 1. On a $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ont même rayon de convergence. Puis, avec $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, on conclut par application du critère de d'Alembert

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

2. On pose $\qquad \forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$

Par concavité, on a $\qquad \forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$

d'où $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant \frac{2}{\pi\sqrt{n}} \geqslant \frac{2}{\pi n}$

On en déduit $\qquad \forall x \in \left[0\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{2}{\pi} \ln(1-x)$

Par comparaison, on conclut $\qquad \boxed{\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty}$

Exercice 8 (**)

Soit f développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $(x_n)_n \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ vérifiant $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $f(x_n) = 0$ pour tout n entier. Montrer que f est nulle.

Corrigé : Soit $(a_k)_k \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ pour x réel. On suppose les a_n non tous nuls et on pose $\ell = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{n=\ell}^{+\infty} a_n x^n = x^\ell g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \sum_{k=\ell}^{+\infty} a_k x^{k-\ell}$$

et $f(x_n) = x_n^\ell g(x_n) = 0$ pour n entier d'où $g(x_n) = 0$. La fonction g est développable en série entière donc continue en 0. Par conséquent, il vient

$$g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(0) = a_\ell = 0$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est nulle.}}$$

Remarque : Ce résultat est intitulé *principe des zéros isolés.*

Exercice 9 (**)

Montrer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire la valeur de cette somme.

Corrigé : On considère la série entière $\sum \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$. Elle a même rayon de convergence que sa série dérivée deux fois $\sum (-1)^n x^{2n}$. Or, pour $r \geqslant 0$, on a clairement $(-1)^n r^{2n} = \mathrm{O}(1)$ si et seulement $r \leqslant 1$ et on en déduit son rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$. On pose

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$$

Par dérivation de séries entières, il vient

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \mathrm{S}''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

Par intégration, on obtient

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(x) = \mathrm{S}'(0) + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{Arctan}(x)$$

puis
$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(0) + \int_0^x \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$$

Avec
$$\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

on en déduit la convergence absolue de $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ par comparaison et critère de Riemann. D'après le théorème d'Abel radial, il s'ensuit

$$\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

Or, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'où

$$\int_0^x \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 1]{} \int_0^1 \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$$

On conclut $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t}$$

En intégrant par parties, il vient

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t = [t\operatorname{Arctan}(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Arctan}(1) - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1$$

Ainsi $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}}$$

Exercice 10 (**)

Soit n entier. Un *dérangement* est une permutation de $[\![1\,;\,n]\!]$ sans point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de $[\![1\,;\,n]\!]$ avec $\mathrm{D}_0 = 1$ pour convention.

1. Justifier $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{D}_{n-k}$

2. Montrer que le rayon de convergence n'est pas nul puis déterminer la somme de la série entière $\sum \frac{\mathrm{D}_n}{n!} x^n$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{D}_n}{n!}$.

Corrigé : 1. On note $\mathrm{F}_{n,k}$ l'ensemble des permutations de $[\![1\,;\,n]\!]$ ayant k points fixes. La famille $(\mathrm{F}_{n,k})_{k\in[\![0\,;\,n]\!]}$ est une partition de S_n d'où

$$|\mathrm{S}_n| = \sum_{k=0}^{n} |\mathrm{F}_{n,k}| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |\mathrm{F}_{n-k,0}|$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{D}_{n-k}}$$

2. On a $\mathrm{D}_n \leqslant |\mathrm{S}_n| = n!$ pour n entier d'où $\boxed{\mathrm{R} \geqslant 1}$

Les séries entières $\sum \frac{\mathrm{D}_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n!}$ ont pour rayons de convergence respectifs $\mathrm{R} \geqslant 1$ et $+\infty$ et d'après le théorème du produit de Cauchy, on en déduit

$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{D}_{n-k}}{k!(n-k)!} \right) x^n = \mathrm{e}^x \mathrm{S}(x)$$

D'où $$\boxed{\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}}$$

3. D'après le théorème du produit de Cauchy pour les séries entières, il vient

$$\forall x \in]-1\,;1[\qquad \mathrm{S}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n$$

D'après l'unicité du développement en série entière, on trouve

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{\mathrm{D}_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}}$$

On conclut $\boxed{\dfrac{\mathrm{D}_n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}}$

Remarque : Pour n entier, on pose $\mathrm{A}_k = \{\sigma \in \mathrm{S}_n \mid \sigma(k) = k\}$. On a

$$\mathrm{S}_{n,0} = \mathrm{S}_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k$$

D'après la formule du crible (hors-programme), on sait

$$\operatorname{Card} \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \operatorname{Card} \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{A}_{i_j}$$

d'où

$$\operatorname{Card} \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!$$

Ainsi, on retrouve

$$\frac{\mathrm{D}_n}{n!} = \frac{\operatorname{Card} \mathrm{S}_{n,0}}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Exercice 11 (**)

Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et $r \in]0\,;\mathrm{R}[$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.

1. Montrer $\qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad 2\pi r^k a_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\theta$
2. On suppose $\mathrm{R} = +\infty$ et f bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Corrigé : 1. Soit k entier et $\theta \in [0\,;2\pi]$. On a

$$f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}$$

Notons $\qquad \forall (n,\theta) \in \mathbb{N}\times[0\,;2\pi] \qquad u_n(\theta) = a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}$

On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_\infty = |a_n|\, r^n$

et $\sum |a_n|\, r^n$ converge absolument puisque $r < \mathrm{R}$. On en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum u_n$ d'où, en intégrant terme à terme

$$\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta}_{=2\pi\delta_{n,k}}$$

Ainsi $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad 2\pi r^k a_k = \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\theta}$$

2. Soit $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que $|f(z)| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par inégalité triangulaire, il vient pour k entier non nul et $r > 0$

$$2\pi r^k |a_k| \leqslant \int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\right|\,\mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \mathrm{M}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{M}$$

D'où $$\forall r > 0 \qquad |a_k| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{r^k}$$

Faisant tendre $r \to +\infty$, on en déduit $\dfrac{\mathrm{M}}{r^k} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$ et d'où $a_k = 0$ pour k entier non nul. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est constante.}}$$

Remarque : Ce résultat s'intitule *théorème de Liouville.*

Exercice 12 (**)

On pose $$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad f(x) = \frac{\mathrm{Arcsin}\,(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 puis montrer que f est développable en série entière et préciser son développement.

Corrigé : La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1\,[$. Par dérivation, il vient

$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x\,\mathrm{Arcsin}\,(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ainsi, la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$$

Plus précisément, la fonction f est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Cherchons une solution développable en série entière $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in \,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$ avec R qu'on suppose strictement positif. Par dérivation d'une série entière, on a

$$\forall x \in \,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[\qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

On injecte les expressions dans l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

soit $$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

Avec un changement d'indice dans la première somme, il vient

$$a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

Par linéarité du symbole somme dans l'intervalle de convergence, on obtient

$$a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2) a_{n+2} - (n+1) a_n \right] x^{n+1} = 1$$

Par unicité du développement en série entière, on trouve

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2) a_{n+2} - (n+1) a_n = 0$$

La condition initiale $f(0) = 0$ équivaut à $a_0 = 0$. Par récurrence immédiate, on a $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} \neq 0$ pour tout n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{2n+1} = a_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k+1)(2k)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Vérifions que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n = \sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ est non nul. On pose $u_n = a_{2n+1} r^{2n+1}$ pour $r > 0$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{2n+3} r^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} r^2$$

On utilise le critère de d'Alembert. Si $r^2 > 1$ ce qui équivaut à $r > 1$, la série diverge grossièrement d'où $\mathrm{R} \leqslant 1$. Si $r^2 < 1$ ce qui équivaut à $r < 1$, la série converge absolument d'où $\mathrm{R} \geqslant 1$. Ainsi, on a $\mathrm{R} = 1$ et d'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \left]-1\,; 1\right[\qquad \frac{\operatorname{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$