ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°50

Exercice 1 (**)

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$.
2. Montrer que la suite $\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
3. En déduire un équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$ pour $x \to 1^-$.

Corrigé : 1. Avec $\ln(2) \leqslant \ln(n) \leqslant n-1 \leqslant n$ pour tout $n \geqslant 2$, il vient

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

2. On pose $u_n = \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour n entier non nul. On a pour $n \geqslant 2$

$$u_n - u_{n-1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la série $\sum_{n\geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$ converge absolument et d'après le lien suite/série téléscopique, on en déduit la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et par conséquent

$$\boxed{\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \mathrm{O}(1)}$$

3. Soit $x \in [\,0\,;1\,[$. On a

$$(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n = (1-x)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n\right)$$

D'après théorème sur le produit de Cauchy de séries entières, chaque série entière concernée ayant un rayon de convergence égal à 1, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Notant M un majorant de $\left|\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right|$, il vient par inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]x^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right|x^n \leqslant \mathrm{M}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{\mathrm{M}}{1-x}$$

d'où
$$(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n = \mathrm{O}(1) - \ln(1-x) \underset{x\to1}{\sim} -\ln(1-x)$$

Ainsi
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n \underset{x\to1}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}}$$

Exercice 2 (**)

Montrer les égalités :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th}\,(t))\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

3. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^t} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$

Corrigé : 1. On a

$$\forall t>0 \qquad \ln(\mathrm{th}\,(t)) = \ln\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\right) - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2t}\right)$$
$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}(1-(-1)^n)\frac{\mathrm{e}^{-2nt}}{n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}2\frac{\mathrm{e}^{-2(2n+1)t}}{2n+1}$$

La série $\displaystyle\sum\int_0^{+\infty}\frac{2\left|\mathrm{e}^{-2(2n+1)t}\right|}{2n+1}\,\mathrm{d}t = \sum\frac{1}{(2n+1)^2}$ converge. Ainsi par intégration terme à terme, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(\mathrm{th}\,(t))\,\mathrm{d}t$ converge avec

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\ln(\mathrm{th}\,(t))\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}}$$

2. Par intégration de série entière, il vient

$$\forall t\in\,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{Arctan}\,(t) - \mathrm{Arctan}\;0 = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

On pose
$$\forall t\in\,]-1\,;1\,[\qquad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2n+1}$$

On a
$$\forall t\in\,]-1\,;1\,[\qquad \varphi(t) = \begin{cases}\dfrac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{t} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$$

La fonction φ est développable en série entière sur $]-1\,;1\,[$ donc prolonge continument $t\mapsto\dfrac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{t}$ en 0 et par intégration d'une série entière

$$\forall x\in[\,0\,;1\,[\qquad \int_0^x\frac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

La fonction $t\mapsto\dfrac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{t}$ prolongée en 0 devient continue sur $\mathbb{R}$ sans difficulté d'où

$$\int_0^x\frac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 1]{} \int_0^1\frac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

On a
$$\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence de la série $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ par comparaison et critère de Riemann. D'après le théorème d'Abel radial, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^1\frac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}}$$

3. On a $$\forall t \in \left]0\,;1\right[\qquad \ln(t)\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln(t)}{n}$$

Pour n entier non nul, on a $t^n \ln(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ d'où l'intégrabilité de $t \mapsto t^n \ln(t)$ sur $\left]0\,;1\right[$ (faussement impropre en 1 et en intégrant par partie, le crochet étant fini

$$\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{t^{n+1}\ln(t)}{n+1}\right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 \left|\frac{t^n\ln(t)}{n}\right|\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)^2}$ converge. Ainsi, par intégration terme à terme, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ converge avec

$$\boxed{\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}}$$

4. On a $$\forall t \in \left]0\,;1\right] \qquad \frac{1}{t^t} = \mathrm{e}^{-t\ln(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(t\ln(t))^n}{n!}$$

On pose $$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathrm{I}_{n,m} = \int_0^1 t^n \ln(t)^m\,\mathrm{d}t$$

Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$. On a $t^n\ln(t)^m \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ d'où la convergence de $\mathrm{I}_{m,n}$. Pour m entier non nul, les fonctions $t\mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et $t\mapsto \ln(t)^m$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\frac{t^{n+1}\ln(t)^m}{n+1} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{t^{n+1}\ln(t)^m}{n+1} \xrightarrow[t\to 1]{} 0$$

on obtient en intégrant par parties

$$\mathrm{I}_{n,m} = \underbrace{\left[\frac{t^{n+1}\ln(t)^m}{n+1}\right]_0^1}_{=0} - \frac{m}{n+1}\int_0^1 t^n\ln(t)^{m-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{m}{n+1}\mathrm{I}_{n,m-1}$$

Par récurrence immédiate, il vient

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2 \qquad \mathrm{I}_{n,m} = (-1)^m\frac{m!}{(n+1)^m}\mathrm{I}_{n,0} = (-1)^m\frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$$

En particulier $$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \int_0^1 (t\ln(t))^n\,\mathrm{d}t = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

La série $\displaystyle\sum\int_0^1\left|\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 (t\ln(t))^n\,\mathrm{d}t\right| = \sum\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ converge. Ainsi, par intégration terme à terme, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^t}$ converge avec

$$\boxed{\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}$$

Exercice 3 (**)

Soit $(a_n)_n$ suite non nulle T-périodique avec T entier non nul.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Déterminer sa somme S sur l'intervalle ouvert de convergence.

Corrigé : 1. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$. La suite $(a_n)_n$ prend un nombre fini de valeurs donc est bornée d'où $\mathrm{R} \geqslant 1$. Par ailleurs, la suite $(a_n)_n$ est non nulle donc il existe p entier tel que $a_p \neq 0$ et par suite $a_{p+\mathrm{T}n} \neq 0$ pour tout n entier. Par conséquent, la série $\sum a_n$ diverge grossièrement d'où $\mathrm{R} \leqslant 1$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

2. Soit $x \in \,]-1\,;1\,[$. Pour N entier, on a

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{NT}-1} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\mathrm{T}-1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} a_{n+k\mathrm{T}} x^{n+k\mathrm{T}} = \left(\sum_{n=0}^{\mathrm{T}-1} a_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} x^{k\mathrm{T}}\right)$$

Faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\mathrm{T}-1} a_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{k\mathrm{T}}\right)$$

On conclut $$\boxed{\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{1}{1-x^{\mathrm{T}}}\sum_{n=0}^{\mathrm{T}-1} a_n x^n}$$

Exercice 4 (***)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières :

1. $\sum a_n^2 z^n$
2. $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$
3. $\sum \dfrac{n!\,a_n}{n^n} z^n$

Corrigé : 1. Soit $r \geqslant 0$. On a

$$a_n^2 r^n = \mathrm{O}(1) \iff a_n\left(\sqrt{r}\right)^n = \mathrm{O}(1)$$

et $$\sqrt{r} < \mathrm{R} \implies a_n\left(\sqrt{r}\right)^n = \mathrm{O}(1) \quad \text{et} \quad \sqrt{r} > \mathrm{R} \implies a_n\left(\sqrt{r}\right)^n \neq \mathrm{O}(1)$$

On obtient $$\boxed{\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}^2}$$

2. Soit $r \geqslant 0$ et $\lambda \in \,]\,0\,;\mathrm{R}\,[$. On a

$$\frac{a_n}{n!} r^n = a_n \lambda^n \times \frac{1}{n!}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^n = \mathrm{O}(1) \times \mathrm{o}(1) = \mathrm{o}(1)$$

et ceci vaut pour tout $r \geqslant 0$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{R}_2 = +\infty}$$

3. Avec l'équivalent de Stirling, on trouve

$$\frac{n! a_n}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, a_n \mathrm{e}^{-n}$$

L'encadrement $1 \leqslant \sqrt{n} \leqslant n$ permet d'affirmer que les séries entières $\sum \dfrac{n!}{n^n} a_n z^n$ et $\sum a_n \left(\dfrac{z}{\mathrm{e}}\right)^n$ ont même rayon de convergence. Enfin, pour $r \geqslant 0$, on a

$$r < \mathrm{Re} \implies a_n \left(\frac{r}{\mathrm{e}}\right)^n = \mathrm{O}(1) \implies r \leqslant \mathrm{R}_3$$

et
$$r > \mathrm{Re} \implies a_n \left(\frac{r}{\mathrm{e}}\right)^n \neq \mathrm{O}(1) \implies r \geqslant \mathrm{R}_3$$

Ceci prouve respectivement $\mathrm{Re} \leqslant \mathrm{R}_3$ et $\mathrm{Re} \geqslant \mathrm{R}_3$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{R}_3 = \mathrm{e}\,\mathrm{R}}$$

Exercice 5 (***)

Déterminer le rayon puis un équivalent en 1 de la somme de la série entière $\sum x^{n^2}$.

Corrigé : Soit $r \geqslant 0$. On a $\qquad r^{n^2} = \mathrm{O}(1) \iff r \leqslant 1$

Il s'ensuit
$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

On pose
$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$$

Fixons $x \in \left]0\,;1\right[$. L'application $t \mapsto x^{t^2} = \mathrm{e}^{t^2 \ln(x)}$ est continue, décroissante, positive sur $\mathbb{R}_+$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x^{(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{t^2 \ln(x)}\,\mathrm{d}t \leqslant x^{n^2}$$

D'après le théorème de comparaison série/intégrale, la série $\sum x^{n^2}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln(x)}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature donc convergentes et après sommation

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln(x)}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{(n+1)^2} \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln(x)}\,\mathrm{d}t$$

Connaissant l'intégrale de Gauss, le changement de variables $u = \left(\sqrt{-\ln(x)}\right) t$ donne

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln(x)}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|\ln(x)|}}$$

D'où
$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x \to 1}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}}$$

Exercice 6 (***)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer
$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{e}^{\,z}$$

Corrigé : Soit $z \in \mathbb{C}$. Avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, on obtient pour n entier non nul

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} z^k$$

On pose
$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \qquad u_k(n) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k} z^k$$

Soit k entier. Pour $n > k$, on trouve

$$u_k(n) = \frac{z^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{z^k}{k!}$$

et $\qquad \forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \qquad |u_k(n)| \leqslant \dfrac{|z|^k}{k!}$

Ainsi, la série $\sum u_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{N}^*$ et d'après le théorème de double limite, on a

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Autrement dit $\qquad \boxed{\forall z \in \mathbb{C} \qquad \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\,z}}$

Variante : Soit $z \in \mathbb{C}$ et n entier non nul. On a par factorisation de Bernoulli

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^{\,z} = \left(\mathrm{e}^{\frac{z}{n}}\right)^n - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\frac{z}{n}} - \left(1+\frac{z}{n}\right)\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{z}{n}}\right)^k \left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-1-k}$$

Par inégalité triangulaire, on trouve

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{kz}{n}} \left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-1-k}\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|\mathrm{e}^{\frac{z}{n}}\right|^k \left|1+\frac{z}{n}\right|^{n-1-k} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{|z|}{n}}\right)^k \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^{n-1-k} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{|z|}{n}}\right)^k \left(\mathrm{e}^{\frac{|z|}{n}}\right)^{n-1-k} \leqslant n\mathrm{e}^{\frac{|z|(n-1)}{n}}\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^{\,z}\right| \leqslant \left|\mathrm{e}^{\frac{z}{n}} - 1 - \frac{z}{n}\right| n\mathrm{e}^{|z|} \leqslant n\mathrm{e}^{|z|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|z|^k}{n^k k!} \leqslant n\mathrm{e}^{|z|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|z|^k}{n^2 k!} \leqslant \frac{1}{n}\mathrm{e}^{|z|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$

Le résultat suit.

Exercice 7 (***)

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. On suppose que $\sum a_n \mathrm{R}^n$ converge. À l'aide d'une transformation d'Abel, montrer que la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[\,0\,;\mathrm{R}\,]$.
2. Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$ deux séries réelles ou complexes convergentes de produit de Cauchy $\sum c_n$. Montrer que si la série $\sum c_n$ converge, alors on a la relation

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

Corrigé : 1. C'est un résultat de cours. On note $\rho_{\mathrm{N}} = \displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} a_n \mathrm{R}^n$ pour N entier. On a pour $x \in [\,0\,;\mathrm{R}\,[$ et N entier

$$\begin{aligned}\sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} a_n \mathrm{R}^n \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n \\ &= \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} (\rho_n - \rho_{n+1}) \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n = \rho_{\mathrm{N}} \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{\mathrm{N}} + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \rho_n \left[\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n - \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{n-1}\right]\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 entier tel que $|\rho_n| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Ainsi, pour $\mathrm{N} \geqslant n_0$

$$\left|\sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} a_n x^n\right| \leqslant \varepsilon + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \varepsilon \left[\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{n-1} - \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n\right] \leqslant \varepsilon + \varepsilon \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{\mathrm{N}} \leqslant 2\varepsilon$$

Cette majoration vaut encore pour $x = \mathrm{R}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n x^n \text{ converge uniformément sur } [\,0\,;\mathrm{R}\,].}$$

2. Les séries entières $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On pose

$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \qquad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

D'après le théorème du produit de Cauchy de séries entières, on a

$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad f(x)g(x) = h(x)$$

En appliquant le théorème de convergence radiale d'Abel aux séries $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$, $\sum c_n x^n$, séries de fonctions continues qui convergent uniformément sur $[\,0\,;1\,]$, on en déduit la continuité des fonctions sommes sur $[\,0\,;1\,]$ d'où $f(1)g(1) = h(1)$, autrement dit

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n}$$

Exercice 8 (****)

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite sommable. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

1. Montre que la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{C}$.
2. Établir l'égalité $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
3. Désormais, on suppose seulement que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que les résultats précédents demeurent. On pourra poser $$\mathrm{A}_{-1} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_{n-1} \frac{z^n}{n!}$$

Corrigé : 1. La famille $(a_n)_n$ est sommable ce qui équivaut à la convergence absolue de la série $\sum a_n$ et par conséquent $a_n = \mathrm{o}(1)$ d'où $\dfrac{a_n}{n!} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n!}\right)$. Il en résulte que le rayon de convergence de la série entière définissant la fonction g est $+\infty$ et par propriétés sur les séries entières, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est définie et continue sur } \mathbb{C}.}$$

2. La série $\sum a_n$ converge absolument donc converge. Par intégration par parties, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$$

Par suite $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{a_n}{n!} t^n\,\mathrm{d}t$$

Notant pour n entier $f_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \dfrac{a_n}{n!} t^n$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$, on a l'intégrabilité de f_n, la convergence simple de $\sum f_n$ et

$$\sum \int_0^{+\infty} |f_n|(t)\,\mathrm{d}t = \sum \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum |a_n| \text{ converge}$$

Par intégration terme à terme, il vient

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{a_n}{n!} t^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t}$$

3. Le résultat de la première question a lieu puisqu'on a toujours $a_n = \mathrm{o}(1)$. La série $\sum a_n$ converge d'où $\mathrm{A}_n = \mathrm{O}(1)$ et il s'ensuit que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{C}$ et par dérivation de série entière

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n \frac{t^n}{n!}$$

On a $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1}] \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_{n-1} \frac{t^n}{n!} = \mathrm{F}'(t) - \mathrm{F}(t)$

Puis pour $x \geqslant 0$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x [\mathrm{F}'(t) - \mathrm{F}(t)]\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [\mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-t}]_0^x = \mathrm{F}(x)\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose d'un seuil N entier tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on a $|\mathrm{A}_{n-1} - \mathrm{S}| \leqslant \varepsilon$. Pour $x \geqslant 0$, il vient

$$\mathrm{F}(x)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{S} = \left(\mathrm{F}(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{S}\frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} [\mathrm{A}_{n-1} - \mathrm{S}] \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} + \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} [\mathrm{A}_{n-1} - \mathrm{S}] \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$$

On a $\qquad \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} [\mathrm{A}_{n-1} - \mathrm{S}] \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Puis, par inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} [\mathrm{A}_{n-1} - \mathrm{S}] \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \right| \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} \varepsilon \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, on dispose d'un seuil $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que, pour $x \geqslant \mathrm{M}$, on a $|\mathrm{F}(x)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{S}| \leqslant 2\varepsilon$, autrement dit

$$\mathrm{F}(x)\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \mathrm{S}$$

On conclut $\qquad \boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$

Exercice 9 (****)

Soit $\alpha > 0$.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$. On note S sa somme.
2. Établir

$$\forall x \in \left]0\,;1\right[\qquad \frac{x}{|\ln(x)|^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1) \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \frac{1}{x\,|\ln(x)|^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1)$$

3. En déduire un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

Corrigé : 1. Pour n entier non nul, on a

$$\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

On en déduit $\qquad \boxed{\mathrm{R} = 1}$

2. Soit $x \in \left]0\,;1\right[$. On pose

$$\forall t \geqslant 0 \qquad u(t) = t^\alpha \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad v(t) = x^t = \mathrm{e}^{-t|\ln(x)|}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha x^t \,\mathrm{d}t$ converge puisque l'intégrande uv est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées d'où l'intégrabilité par comparaison et critère de Riemann. La fonction u est croissante et la fonction v est décroissante. Soit k entier non nul.

On a $$\forall t \in [\,k-1\,;k\,] \qquad u(t) \leqslant u(k) \quad \text{et} \quad v(t+1) \leqslant v(k)$$

Par produit de termes positifs, on en déduit
$$\forall t \in [\,k-1\,;k\,] \qquad u(t)v(t+1) \leqslant u(k)v(k)$$

c'est-à-dire $$\forall t \in [\,k-1\,;k\,] \qquad t^\alpha \mathrm{e}^{-(t+1)|\ln(x)|} \leqslant k^\alpha x^k$$

Après intégration, puis sommation par convergence de l'intégrale, on obtient
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k} t^\alpha x^{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^\alpha \mathrm{e}^{-(t+1)|\ln(x)|}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^\alpha x^k$$

Avec le changement de variables $u = t\,|\ln(x)|$, les intégrales étant de même nature, convergentes donc égales, on obtient
$$\int_0^{+\infty} t^\alpha \mathrm{e}^{-(t+1)|\ln(x)|}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{|\ln(x)|^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} u^\alpha \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Puis, pour k entier, on a
$$\forall t \in [\,k\,;k+1\,] \qquad u(k) \leqslant u(t) \quad \text{et} \quad v(k) \leqslant v(t-1)$$

Par produit de termes positifs, il vient
$$\forall t \in [\,k\,;k+1\,] \qquad u(k)v(k) \leqslant u(t)v(t-1)$$

c'est-à-dire $$\forall t \in [\,k+\,;k+1\,] \qquad k^\alpha x^k \leqslant t^\alpha \mathrm{e}^{-(t-1)|\ln(x)|}$$

Après intégration puis sommation par convergence de l'intégrale, on obtient
$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^\alpha x^k = \mathrm{S}(x) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k}^{k+1} t^\alpha x^t\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^\alpha \mathrm{e}^{-(t-1)|\ln(x)|}\,\mathrm{d}t$$

Par le même changement de variables que précédemment, on trouve
$$\int_0^{+\infty} t^\alpha \mathrm{e}^{-(t-1)|\ln(x)|}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x\,|\ln(x)|^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} u^\alpha \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

On conclut $$\boxed{\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \frac{x}{|\ln(x)|^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1) \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \frac{1}{x\,|\ln(x)|^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1)}$$

3. Avec l'équivalent usuel $\ln(x) \underset{x\to1}{\sim} x-1$, on conclut
$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}}$$