

Concours blanc - Mathématiques - 4h

Le sujet est une réécriture de l'épreuve de mathématiques 1 Mines-Ponts 2015. L'énoncé original était constitué de 16 questions contre 27 dans cette version (questions additionnelles, questions morcelées en plusieurs questions).

I Opérateur de Volterra

1. Bien réussie mais 1/5 de la classe ne traite pas correctement le caractère défini malgré les innombrables répétitions de cet argument en classe... Pour les concernés : que faut-il donc faire pour que vous suiviez enfin les consignes de rédaction qu'on vous donne ???
2. Bien réussie par une majorité. Certains ne reconnaissent pas dans l'écriture de $V(f) = \int_0^x f(t) dt$ avec $f \in E$ une primitive de f ... Il faut réagir et travailler beaucoup plus avec une reprise très régulière des exercices abordés en classe. Assister au cours et aux TD ne suffit pas !
3. Moyennement réussie. Une simple intégration par parties, naturelle compte-tenu d'une forme d'échange des rôles entre f et g , donne le résultat.
4. Le caractère défini de $V^* \circ V$ est très peu abordé et ceux qui traitent cette question le font souvent avec des arguments très lourds alors qu'une simple dérivation de $V(f)$ fournit la réponse attendue. La discussion sur une valeur propre λ de $V^* \circ V$ nécessite de pouvoir isoler λ dans la relation obtenue et il faut donc notamment évoquer $\langle f, f \rangle > 0$ avec f vecteur propre associé.
5. Moyennement réussie. Beaucoup d'erreurs lors de la dérivation de $V^* \circ V(f)$ simplement parce que vous ne faites pas le choix de noter $g = V(f)$ qui rend la dérivation limpide pour la suite.
6. Moyennement réussie. Dans la relation $V^* \circ V(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$, on a $\lambda \neq 0$ et on peut donc isoler $f_\lambda = V^* \circ V\left(\frac{1}{\lambda} f_\lambda\right)$. La non-nullité de λ est passée sous-silence par un grand nombre et les affirmations qui suivent sont donc sans valeur.
7. Moyennement réussie alors qu'il s'agit de résoudre l'oscillateur harmonique...
8. Moyennement réussie. Beaucoup ne voient pas qu'un travail est nécessaire pour établir le caractère nécessaire de l'équivalence attendue.

II Théorème d'approximation de Weierstrass

Partie traitée intégralement en classe et qui figurait comme question d'un programme de colles. Peut réussie malgré tout, ce qui illustre d'une certaine façon le caractère beaucoup trop superficiel de l'apprentissage du cours.

9. Bien réussie mais des lourdeurs pour le calcul de $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.
10. Moyennement réussie alors qu'il s'agit simplement d'évoquer le théorème de transfert.
11. Peu réussie. Il s'agit de reconnaître $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right)$. À reprendre pour un grand nombre.
12. Moyennement réussie. Compte-tenu de la convergence uniforme à établir, il faut évoquer l'uniforme continuité de f résultant du théorème de Heine. La gestion du terme dépendant de n est mal comprise avec de nombreux passages à la limite abusifs alors qu'on veut justement établir l'existence d'une limite nulle.
13. Peu réussie. Il faut expliciter le passage de $[a; b]$ à $[0; 1]$ et le retour à $[a; b]$.

III Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

14. Moyennement réussie bien que traitée en classe.
15. Moyennement réussie et beaucoup d'oublis du cas $n = 0$.
16. Très peu réussie bien que traitée en classe. Il faut faire le lien entre la norme $\|\cdot\|_\infty$ et la norme $\|\cdot\|_G$, la première étant plus fine que la seconde.
17. Très peu réussie. La décroissance de $(d(f, F_n))_n$ avec $f \in G$ résulte de la croissance de $(F_n)_n$. La densité de F permet ensuite de conclure.
18. Peu réussie, argument de même nature que celui de la question 16.
19. Question facile moyennement réussie.
20. Question technique, peu réussie. Le calcul $\langle g_x, c_n \rangle$ avec n entier se mène bien en séparant par Chasles en $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \dots$ et la définition même de g_x invite à poser le changement de variables $u = \pi - t$ dans la seconde intégrale. La suite du calcul ne présente rien d'insurmontable mais demande méthode et un peu de persévérance.
22. Très peu réussie. Il s'agit simplement d'établir la convergence uniforme de la série de fonction concernée. Et pour cela, on regarde d'abord si la convergence normale a lieu, et celle-ci est une formalité.
23. Très peu abordée et moyennement réussie par ceux qui traitent cette question.

IV Équation différentielles du type Sturm-Liouville

24. Peu abordée. Question facile en utilisant le caractère symétrique de $V^* \circ V$ et en observant que φ_n avec n entier est un vecteur propre.
- 25, ... 28. Très peu abordées, pratiquement plus aucun point accordé sur ces dernières questions.