

1 Réglage de la position d'équilibre du pendule

Objectif

Définir la position d'équilibre du pendule et valider l'exigence 1.1 de réglage à distance de cette position.

Question 1 Par application du Principe Fondamental de la Statique au pendule (2) à l'équilibre sur Mars, lorsque $\alpha(t) = \alpha_{eq}$, exprimer le moment de précontrainte C_0 en fonction des autres paramètres de l'étude. Préciser le bilan des actions mécaniques extérieures, le théorème appliqué et les éléments d'application du théorème (projection, point éventuel...).

(2) est soumis à

- l'action du bâti $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}$ (donnée en annexe)
- l'action du ressort $\{\mathcal{T}_{ressort \rightarrow 2}\}$ (donnée en annexe)
- la pesanteur $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} -g_M M \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} -g_M M \vec{y}_1 \\ O_1 \vec{G} \wedge (-g_M M \vec{y}_1) \end{array} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{c} -g_M M \vec{y}_1 \\ dg_M M \sin(\alpha) \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1}$

Le Théorème du Moment Statique (TMS) en O_1 projeté sur \vec{z}_1 donne :

$$-\mu \dot{\alpha}(t) + C_0 - k(\alpha(t) - \alpha_0) + dg_M M \sin(\alpha(t)) = 0$$

d'où avec $\alpha(t) = \alpha_{eq}$: $C_0 = -dg_M M \sin(\alpha_{eq}) + k(\alpha_{eq} - \alpha_0)$

Question 2 Calculer le moment en N·mm sur l'axe de rotation du pendule, généré par le déplacement de la masse m , en supposant $\alpha_{eq} = \alpha_0$. Conclure vis-à-vis de l'exigence 1.1.

Avec $\alpha_{eq} = \alpha_0$, on adapte le calcul du moment de la pesanteur effectué ci-dessus pour obtenir, dans les positions extrêmes de la masselotte :

$$M_{pes \rightarrow 2}(O_1) \cdot \vec{z}_1 = dg_M (M - m) \sin \alpha_0 + (d \pm \frac{c}{2}) g_M m \sin \alpha_0 = M_{pes \rightarrow 2}(O_1) \cdot \vec{z}_1 (\text{sans dfaut}) \pm \frac{c}{2} g_M m \sin \alpha_0$$

On peut donc faire varier le moment $\Delta M = \pm \frac{c}{2} g_M m \sin \alpha_0$

A.N. : $\Delta M = \frac{18}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$ d'où $\Delta M \approx 1.10^{-3} \text{ N.m} > 0.9 \text{ N.mm}$

1.1 est bien respectée

2 Sensibilité intrinsèque d'un pendule à un séisme

Objectif

Mettre en évidence la grandeur physique à laquelle le pendule est sensible lors d'un séisme, ainsi que ses caractéristiques dynamiques, en vue du réglage de sa commande.

Question 3 Déterminer, dans son mouvement par rapport au repère R_0 , l'expression du moment cinétique du pendule (2) en O_1 , $\vec{\sigma}_{O_1,2/R_0}$. On l'exprimera en fonction des paramètres cinétiques de (2) et des paramètres géométriques et cinématiques du système.

$$\vec{\sigma}_{O_1,2/R_0} = \vec{I}_{(0_1,2)} \vec{\Omega}_{2/0} + M O_1 \vec{G} \wedge \vec{V}_{0_1,2/R_0}$$

$$\text{avec } \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}(t) \vec{z}_1$$

$$\text{et } \vec{V}_{0_1,2/R_0} = \vec{V}_{0_1,2/1} + \vec{V}_{0_1,1/R_0} = \vec{0} + V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1$$

$$\text{d'où } \vec{\sigma}_{O_1,2/R_0} = \dot{\alpha}(t) J \vec{z}_1 + M (d\vec{y}_2) \wedge (V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1)$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_{O_1,2/R_0} = [\dot{\alpha}(t)J - Md(V_x \cos \alpha + V_y \sin \alpha)] \vec{z}_1}$$

Question 4 Montrer que la projection sur \vec{z}_1 du moment dynamique du pendule (2) dans son mouvement par rapport au repère R_0 en O_1 , est de la forme donnée.

$$\vec{\delta}_{O_1,2/R_0} = \left. \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{O_1,2/R_0} \right|_{R_0} + M \vec{V}_{O_1/R_0} \wedge \vec{V}_{G,2/R_0}$$

$$\text{Or } \vec{V}_{G,2/R_0} = \vec{V}_{G,2/1}(\text{rotation}) + \vec{V}_{G,1/R_0}(\text{translation} = \vec{V}_{O_1/R_0})$$

$$\begin{aligned} \text{soit } \vec{V}_{O_1/R_0} \wedge \vec{V}_{G,2/R_0} &= (V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1) \wedge (-d\dot{\alpha} \vec{x}_2 + V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1) \\ &= (V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1) \wedge (-d\dot{\alpha} \vec{x}_2) \\ &= d\dot{\alpha} (-V_x \sin \alpha + V_y \cos \alpha) \vec{z}_1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \vec{\delta}_{O_1,2/R_0} = \left[J\ddot{\alpha} - Md \left(-V_x \dot{\alpha} \sin \alpha + \dot{V}_x \cos \alpha + V_y \dot{\alpha} \cos \alpha + \dot{V}_y \sin \alpha \right) + Md \dot{\alpha} (-V_x \sin \alpha + V_y \cos \alpha) \right] \vec{z}_1$$

$$\text{soit après simplification : } \boxed{\vec{\delta}_{O_1,2/R_0} = J\ddot{\alpha} - dM \underbrace{(\dot{V}_x \cos \alpha + \dot{V}_y \sin \alpha)}_{\gamma_{x_2}(t)}}$$

Remarque : On retrouve bien uniquement les composantes de la dérivée de $\vec{V}_{0_1,1/R_0} = (V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1)$ en projection sur \vec{x}_2 d'où le nom γ_{x_2} .

Remarque : On aurait pu effectuer les calculs en G avant de déplacer le résultat en O_1 (calculs légèrement plus rapides), mais la question 3 impose le calcul complet en O_1 .

Question 5 Préciser, sans faire de calculs, le système isolé et l'équation issue du Principe Fondamental de la Dynamique qui permet d'obtenir l'équation du mouvement donnée. Donner les éléments d'application (équation, projection, point éventuel...) du théorème utilisé. Justifier que l'équation obtenue n'est pas linéaire, indépendamment de l'expression de γ_{x_2} .

On isole (2) puis on applique le TMD en O_1 projeté sur \vec{z}_1 pour obtenir (eq. 1).

Le terme en $\sin \alpha(t)$ est non-linéaire.

Remarque : La forme de (eq. 1) permet de vérifier la Question 1.

Question 6 Montrer que l'équation du mouvement linéarisée s'écrit sous la forme donnée.

On pose $\alpha(t) = \alpha_0 + \Delta\alpha(t)$

Ainsi, $\dot{\alpha}(t) = \dot{\Delta\alpha}(t)$ et $\ddot{\alpha}(t) = \ddot{\Delta\alpha}(t)$

A l'ordre 1, on a : $\sin(\underbrace{\alpha_0 + \Delta\alpha(t)}_{\alpha(t)}) = \sin \alpha_0 + \Delta\alpha(t) \cos \alpha_0 + O(\Delta\alpha^2)$

d'où $J\ddot{\Delta\alpha} + \mu\dot{\Delta\alpha} + k\Delta\alpha = dMg_M\Delta\alpha(t) \cos \alpha_0 + dM\gamma_{x_2}$ + $\underbrace{dMg_M \sin \alpha_0 + C_0}_{=0 \text{ d'après Q1 avec } \alpha_{eq}=\alpha_0}$

Question 7 Exprimer, sous forme canonique, la fonction de transfert du pendule $\frac{\alpha(p)}{\gamma_{x_2}(p)}$ et donner la condition de stabilité du pendule sous la forme d'une inéquation. Conclure sur le rôle stabilisateur du ressort.

Dans les condition de Heaviside, (eq. 2) donne : $Jp^2\alpha(p) + \mu p\alpha(p) + k\alpha(p) = dMg_M\alpha(p) \cos \alpha_0 + dM\gamma_{x_2}(p)$

d'où $\frac{\alpha(p)}{\gamma_{x_2}(p)} = \frac{dM}{(k - dMg_M \cos \alpha_0) + \mu p + Jp^2}$

soit $\frac{\alpha(p)}{\gamma_{x_2}(p)} = \frac{\frac{dM}{k - dMg_M \cos \alpha_0}}{1 + \frac{\mu}{k - dMg_M \cos \alpha_0}p + \frac{J}{k - dMg_M \cos \alpha_0}p^2}$

Cette fonction d'ordre 2 est stable si tous les coefficients de son dénominateur sont de même signe, donc si $k - dMg_M \cos \alpha_0 > 0$, soit $k > dMg_M \cos \alpha_0$

Il faut donc un ressort de raideur k suffisante pour maintenir le système dans un état stable. C'est lui qui permet de compenser le moment de la pesanteur qui déséquilibre ce pendule inversé.

Question 8 Donner, en fonction des constantes du problème, les expressions des constantes caractéristiques de cette fonction de transfert : gain d'amplification mécanique noté A , pulsation propre ω_0 et coefficient d'amortissement ξ .

On identifie : $A = \frac{dM}{k - dMg_M \cos \alpha_0}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k - dMg_M \cos \alpha_0}{J}}$

et $\xi = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{\mu}{k - dMg_M \cos \alpha_0} = \frac{\mu}{2\sqrt{J(k - dMg_M \cos \alpha_0)}}$

Question 9 Donner l'expression de α_0 permettant de maximiser le gain d'amplification mécanique A .

A est maximal si $k - dMg_M \cos \alpha_0$ est minimal, donc si $\cos \alpha_0$ est maximal : $\alpha_0 = 0$ donne la meilleur amplification.

Question 10 Conclure vis-à-vis de l'exigence 2.2. Les tracés nécessaires devront figurer sur la Figure la Figure A.

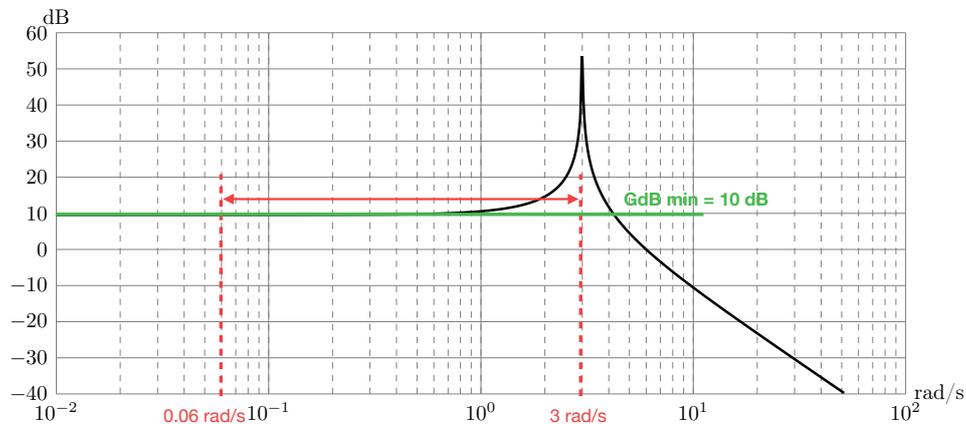


FIGURE A

On constate que le Gain décibel est bien supérieur à 10dB entre 0.06 et 3 rad/s : l'exigence 2.2 est respectée.

Remarque : On peut constater que 2.1 est bien validée également pour $A = 10$ dB, ce qui correspond à $A = 3.1 \text{ rad.m}^{-1}.\text{s}^2$.

3 Optimisation de la réponse d'un pendule à un séisme par un asser-vissement

Objectif

Régler la correction des bobines HF et BF.

Question 11 Déterminer la fonction de transfert $H_\gamma(p) = \frac{U(p)}{\gamma_{x_2}(p)}$, avec $U_C(p) = 0$, en l'exprimant sous la forme donnée.

Avec $U_C(p) = 0$, on obtient par lecture sur le schéma-blocs :

$$U(p) = \frac{K_D}{K + Jp^2} \left[dM\gamma_{x_2}(p) + \frac{K_H}{1 + \tau_H p} K_1 p (-U(p)) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{d'o } \frac{U(p)}{\gamma_{x_2}(p)} &= \frac{\frac{dMK_D}{K + Jp^2}}{1 + \frac{K_D}{K + Jp^2} \cdot \frac{K_H}{1 + \tau_H p} K_1 p} \\ &= \frac{dMK_D(1 + \tau_H p)}{(K + Jp^2)(1 + \tau_H p) + pK_D K_H K_1} \\ &= \frac{dMK_D}{K} \frac{1 + \tau_H p}{1 + p \left(\tau_H + \frac{K_D K_H K_1}{K} \right) + p^2 \frac{J}{K} + p^3 \frac{J\tau_H}{K}} = K_{HF} \frac{1 + a_1 p}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'identifier $K_{HF} = \frac{dMK_D}{K}$; $a_1 = \tau_H$; $b_1 = \left(\tau_H + \frac{K_D K_H K_1}{K} \right)$; $b_2 = \frac{J}{K}$; $b_3 = \frac{J\tau_H}{K}$

Question 12 Justifier que $H_\gamma(p)$ correspond à un système stable quelle que soit la valeur retenue pour K_1 dans la gamme $[0.05 ; 5]$ s. Choisir, en justifiant, la valeur de K_1 parmi les valeurs proposées, la plus adaptée au réglage de l'asservissement avec l'action de la bobine HF seule.

Les pôles sont à partie réelles négatives dans tous les cas présentés, donc $H_\gamma(p)$ correspond toujours à un système stable.

On élimine $K_1 = 0.05$ s car le résultat ne doit pas présenter de résonance. Pour obtenir une Bande Passante à -3dB maximale et respecter l'exigence 3.1, il faut choisir $K_1 = 0.5$ s. Cependant, l'exigence 3.3 n'est respectée dans aucun des cas : à très basse fréquence ($\omega < 0.06$ rad/s), on a toujours une amplification supérieure à 110 dB.

Ce correcteur ne permet pas de respecter l'intégralité des exigences proposées.

Question 13 Justifier que, pour la valeur retenue de K_1 , la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme donnée.

Pour $K_1 = 0.5$ s, on a trois pôles réels négatifs, on note alors :

$$H_\gamma(p) = \frac{K_{HF}(1 + \tau_H)}{\left(1 - \frac{p}{p_1}\right) \left(1 - \frac{p}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p}{p_3}\right)}$$

or $\tau_H = 0.001$ s d'après l'annexe 4 et par lecture dans la Table 4, $-\frac{1}{p_1} = 0.001$ s. Donc en simplifiant :

$$H_\gamma(p) = \frac{K_{HF}}{(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)}$$

avec $\tau_2 = -\frac{1}{p_2} = -\frac{1}{-2/3} = 1.5$ s et $\tau_3 = -\frac{1}{p_3} = 0.1$ s.

Question 14 Justifier que l'asservissement avec l'action de la bobine HF seule ne permet pas de satisfaire les exigences 3.2 et 3.3.

La fonction de transfert en boucle fermée n'a pas de gain unitaire \rightarrow l'écart statique ne sera donc pas nul en réponse à un échelon, l'exigence 3.2 n'est pas respectée.

On lit sur le diagramme de Bode Figure 5 que $G_{dB} < 110$ dB pour $\omega > 0.7$ rad/s, or on veut $G_{dB} \geq 110$ dB jusqu'à $\omega = 3$ rad/s, l'exigence 3.3 n'est pas respectée.

Question 15 Préciser l'intérêt de la chaîne d'action BF vis-à-vis de l'exigence 3.2.

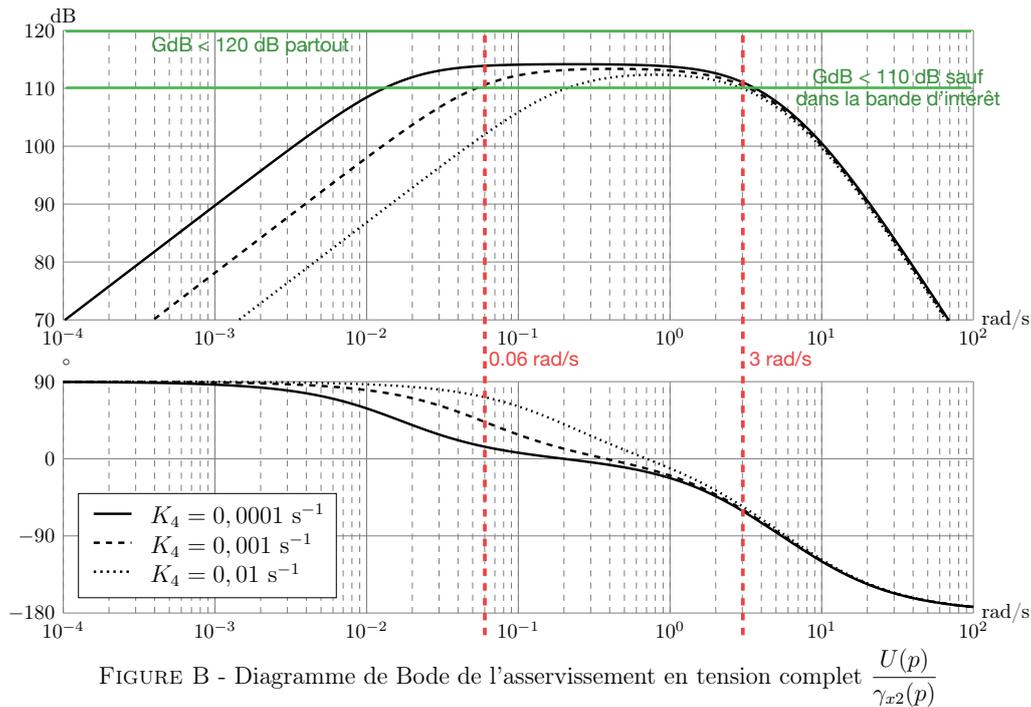
La FTBO possède un intégrateur avant la perturbation grâce à la correction PI, l'erreur statique est donc nulle en réponse à un échelon d'accélération (qui est la perturbation dans ce schéma-blocs), 3.2 est respectée.

Question 16 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement, $H_{BO} = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)}$ Donner, en justifiant, la valeur retenue pour τ_4 .

$$H_{BO} = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_4(1 + \tau_4 p)}{p} \cdot \frac{K_B}{1 + \tau_B p} \cdot \frac{K_D}{K(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)}$$

Or $\tau_B = 0.1$ s, $\tau_2 = 1.5$ s et $\tau_3 = 0.1$ s. Ainsi on pose $\tau_4 = \tau_2 = 1.5$ s afin de compenser le pôle dominant du système et optimiser la rapidité.

Question 17 Choisir, en justifiant, la valeur de K_4 qui permet de vérifier au mieux les exigences 3.3 et 3.4. Les tracés nécessaires apparaîtront sur la Figure B.



Tous les signaux respectent l'exigence 3.4 car tous les gains sont bien inférieurs à 120 dB.

Le gain $K_4 = 0.001 \text{ s}^{-1}$ permet bien d'amplifier à plus de 110 dB dans la bande d'intérêt mais pas à l'extérieur de celle-ci : c'est le seul à respecter complètement l'exigence 3.3.

Question 18 Donner le nom du type de filtre réalisé par le pendule asservi et préciser l'intérêt de cette solution pour la mesure des séismes par le sismomètre VBB.

Un **filtre passe-bande** permet de sélectionner les fréquences d'intérêt (celles des séismes ici) et de les amplifier tout en :

- éliminant le bruit (à HF).
- restant autour d'une position d'équilibre (il n'y a pas d'influence des séismes ou autres perturbations à très basses fréquences, c'est à dire en statique).

4 Insensibilité des pendules au bruit environnant

Objectif

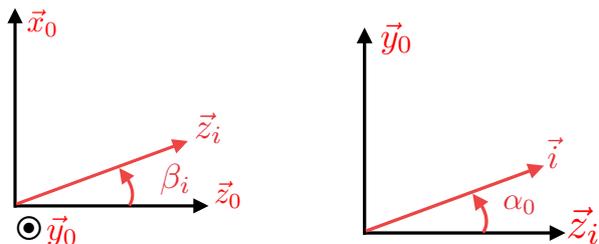
Montrer l'intérêt de la disposition des trois systèmes quant à l'atténuation du bruit environnant.

Question 19 Compléter les 6 termes manquants de la matrice P , en fonction de $\alpha_0, \beta_u, \beta_v$ et β_w .

On définit P telle que :

$$\begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_v \\ \gamma_w \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})} = P \begin{pmatrix} \gamma_{x_0} \\ \gamma_{y_0} \\ \gamma_{z_0} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

On trace les figures planes suivantes valables pour $i \in \{u, v, w\}$:



En projetant : $\vec{i} = \cos \alpha_0 \vec{z}_i + \sin \alpha_0 \vec{y}_0 = \cos \alpha_0 (\cos \beta_i \vec{z}_0 + \sin \beta_i \vec{x}_0) + \sin \alpha_0 \vec{y}_0$

En remplaçant i par u, v et w , on obtient la matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \sin \beta_u & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \cos \beta_u \\ \cos \alpha_0 \sin \beta_v & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \cos \beta_v \\ \cos \alpha_0 \sin \beta_w & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \cos \beta_w \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

Question 20 Exprimer la matrice P en fonction de l'angle α_0 uniquement, en utilisant les valeurs numériques $\beta_u = 0^\circ, \beta_v = 120^\circ$ et $\beta_w = 240^\circ$.

Les applications numériques donnent alors :

$$\sin \beta_u = 0; \sin \beta_v = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \beta_w = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } \cos \beta_u = 1; \cos \beta_v = -\frac{1}{2}; \cos \beta_w = -\frac{1}{2}$$

d'où
$$P = \begin{pmatrix} 0 & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \\ \cos \alpha_0 \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin \alpha_0 & -\frac{\cos \alpha_0}{2} \\ -\cos \alpha_0 \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin \alpha_0 & -\frac{\cos \alpha_0}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

Remarque : On peut vérifier rapidement que $P^{-1}P = I_d$

Question 21 Déterminer les expressions des composantes $\gamma_{x_0}^*, \gamma_{y_0}^*$ et $\gamma_{z_0}^*$ en fonction de $\gamma_u, \gamma_v, \gamma_w, \alpha_0$ et ε , puis en fonction de $\gamma_{x_0}, \gamma_{y_0}, \gamma_{z_0}, \alpha_0$ et ε . Préciser l'impact du bruit dans chacune des directions de la base b_0 .

$$\vec{\Gamma}_{O_1, 1/R_0}^* = \begin{pmatrix} \gamma_{x_0}^* \\ \gamma_{y_0}^* \\ \gamma_{z_0}^* \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} = \begin{pmatrix} \gamma_u + \varepsilon \\ \gamma_v + \varepsilon \\ \gamma_w + \varepsilon \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} \gamma_{x_0}^* \\ \gamma_{y_0}^* \\ \gamma_{z_0}^* \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_u + \varepsilon \\ \gamma_v + \varepsilon \\ \gamma_w + \varepsilon \end{pmatrix}$$

d'où par produit matriciel : $\gamma_{x_0}^* = (\gamma_v + \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha_0} - (\gamma_w + \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha_0}$

$$\text{soit } \boxed{\gamma_{x_0}^* = \frac{\gamma_v - \gamma_w}{\sqrt{3} \cos \alpha_0}}$$

$$\gamma_{y_0}^* = [(\gamma_u + \varepsilon) + (\gamma_v + \varepsilon) + (\gamma_w + \varepsilon)] \frac{1}{3 \sin \alpha_0}$$

$$\text{donc } \boxed{\gamma_{y_0}^* = \left(\frac{\gamma_u + \gamma_v + \gamma_w}{3} + \varepsilon \right) \frac{1}{\sin \alpha_0}}$$

$$\text{Et enfin : } \gamma_{z_0}^* = [2(\gamma_u + \varepsilon) - (\gamma_v + \varepsilon) - (\gamma_w + \varepsilon)] \frac{1}{3 \cos \alpha_0}$$

$$\text{soit } \boxed{\gamma_{y_0}^* = \frac{2\gamma_u - \gamma_v - \gamma_w}{3 \cos \alpha_0}}$$

$$\text{Or } \begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_w \\ \gamma_w \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \gamma_{x_0} \\ \gamma_{y_0} \\ \gamma_{z_0} \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\gamma_u = \sin \alpha_0 \gamma_{y_0} + \cos \alpha_0 \gamma_{z_0}$$

$$\gamma_v = \cos \alpha_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_{x_0} + \sin \alpha_0 \gamma_{y_0} - \frac{\cos \alpha_0}{2} \gamma_{z_0}$$

$$\text{et } \gamma_w = -\cos \alpha_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_{x_0} + \sin \alpha_0 \gamma_{y_0} - \frac{\cos \alpha_0}{2} \gamma_{z_0}$$

En réintégrant cette forme dans les expressions encadrées ci-dessous, on obtient alors

$$\boxed{\gamma_{x_0}^* = \frac{\cos \alpha_0 \sqrt{3} \gamma_{x_0}}{\sqrt{3} \cos \alpha_0} = \gamma_{x_0}}$$

$$\boxed{\gamma_{y_0}^* = \left(\frac{3 \sin \alpha_0 \gamma_{y_0}}{3} + \varepsilon \right) \frac{1}{\sin \alpha_0} = \gamma_{y_0} + \frac{\varepsilon}{\sin \alpha_0}}$$

$$\boxed{\gamma_{z_0}^* = (\cos \alpha_0 \gamma_{z_0} (2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})) \frac{1}{3 \cos \alpha_0} = \gamma_{z_0}}$$

Seule la composante verticale de l'accélération est affectée par le bruit.

Remarque : Il est beaucoup plus rapide d'écrire :

$$\begin{pmatrix} \gamma_{x_0}^* \\ \gamma_{y_0}^* \\ \gamma_{z_0}^* \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_w \\ \gamma_w \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon = \underbrace{P^{-1} P}_{I_d} \begin{pmatrix} \gamma_{x_0} \\ \gamma_{y_0} \\ \gamma_{z_0} \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon$$

ce qui donne presque immédiatement le résultat demandé :-). Cependant l'énoncé demande explicitement le résultat intermédiaire :-).

Question 22 Comment choisir la valeur de α_0 de façon à minimiser l'impact du bruit mesuré ? Préciser si cette valeur est réaliste pour mesurer l'accélération du sol dans les trois directions de l'espace, et si elle permet de maximiser le gain d'amplification mécanique A du pendule comme vu en Q9.

- On minimise ce bruit si $|\sin \alpha_0|$ est maximal, ce qui correspond à $\boxed{\alpha_0 = \frac{\pi}{2}}$, la valeur maximale possible (pas d'inclinaison du pendule).
- Cette condition est en contradiction avec le résultat de la question 9 qui demande un angle minimal pour

maximiser l'amplification du signal.

- Par ailleurs, si $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, on ne peut pas identifier les composantes horizontales de l'accélération suivant \vec{x}_0 et \vec{z}_0 . (P n'est plus inversible entre autres conséquences). Cette grandeur n'est pas réaliste.

5 Filtrage et stockage des données mesurées

Objectif

Estimer le nombre de jours pendant lequel les données mesurées sur Mars sont disponibles pour analyse sur Terre.

Question 23 Donner les fréquences d'échantillonnage en vitesse f_{evmin} et en position f_{epmin} minimales permettant d'éviter le repliement de spectre.

D'après le théorème de Shannon, il faut au moins que $f_{evmin} = 2f_{ev} = 2 \text{ Hz}$ et $f_{epmin} = 2f_p = 0.2 \text{ Hz}$.

Remarque : Notion hors programme de SII en MP, c'est bien au programme de physique par contre.

Question 24 Déterminer la capacité mémoire nécessaire en Mo pour stocker 24 heures de données échantillonnées et numérisées sur 24 bits, soit la vitesse et la position du sol mesurées par les trois systèmes VBB.

24 bit = $3 \times 8 \text{ bit} = 3 \text{ octets}$ par mesure à effectuer.

Pour la vitesse, il faut stocker : $f_{ev} \times 24 \times 3600 \times (3 \text{ octets}) \times 3$ (nb capteurs)

et pour la position : $f_{ep} \times 24 \times 3600 \times (3 \text{ octets})$

d'où un stockage de $3 \times \underbrace{24}_{\sim 25} \times \underbrace{3600 \times 3}_{\sim 10^4} \times \underbrace{(20 + 1)}_{\sim 20} \simeq 15.10^6 = 15 \text{ Mo}$

Question 25 Estimer le nombre de jours de stockage disponibles avec une carte mémoire de 500 Mo pour l'ensemble des données.

Il faut donc un peu plus de 100 Mo par jour. Une carte de 500 Mo permet de stocker complètement les données de 4 jours.

6 Synthèse

Question 26 Donner, en précisant leur rôle, trois éléments qui permettent au sismomètre VBB de SEIS de donner une mesure fidèle de la vitesse et de la position du sol dans toutes les directions de l'espace, tout en s'affranchissant des défauts de positionnement sur le sol martien et du bruit environnant l'instrument.

- La structure de pendule inversé est mise en oscillations par les ondes sismiques

- La masselotte mobile permet d'optimiser la position d'équilibre du pendule même sur un sol incliné
- Les bobines et correcteurs associés permettent de filtrer et d'amplifier les signaux captés par le pendule pour isoler les ondes sismiques.
- L'association des 3 VBB à 120° permet de filtrer le bruit pour les ondes horizontales.

7 Lanceur de rouleaux

Lorsque l'on désire imprimer un très grand nombre d'exemplaires d'un même ouvrage (journal à grand tirage, annuaire téléphonique ...) on utilise généralement des machines à impression rotative.

Ces machines sont alimentées en papier, grâce à de gros rouleaux de papier situés en amont. Au démarrage, les moteurs d'entraînement du rouleau, n'ont pas un couple moteur suffisant pour lancer celui-ci. C'est pour cela que l'on utilise un lanceur, qui a pour fonction d'accélérer le rouleau plein, d'une vitesse initiale nulle à sa vitesse de fonctionnement normal.

En fait, le rouleau **1**, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}) avec le bâti **3**, est entraîné en rotation par adhérence à l'aide d'une courroie **4** plaquée par un vérin **6+7** sur celui-ci, et entraînée par une poulie motrice d'axe (G, \vec{z}) .

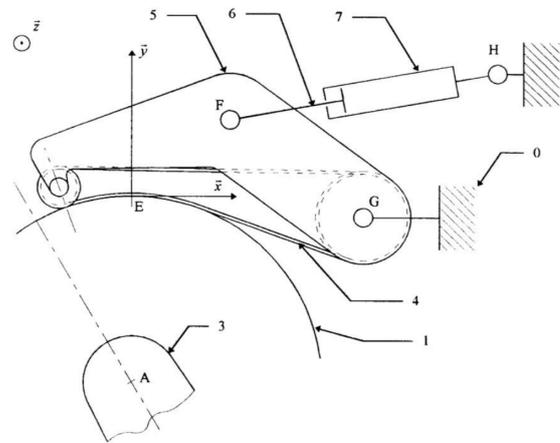
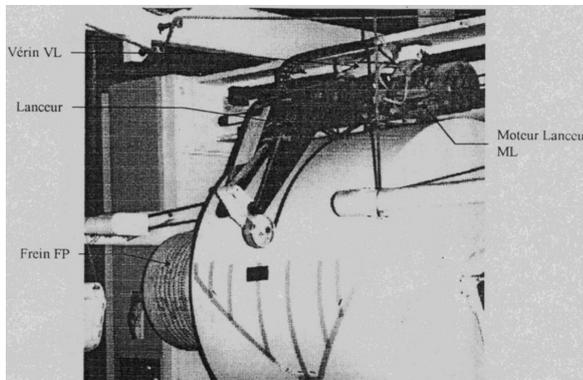


FIGURE 1 – Illustration et schéma cinématique du système étudié.

On donne :

- $\vec{GE} = \delta\vec{x} + \gamma\vec{y} = -730\vec{x} + 65\vec{y}$;
- $\vec{GF} = a\vec{x} + b\vec{y} = -417\vec{x} + 313\vec{y}$;
- $\vec{FH} = c\vec{x} + d\vec{y} = 848\vec{x} + 156\vec{y}$.

Hypothèses :

- Liaisons parfaites (sans adhérence), à l'exception du contact entre la courroie **4** et le rouleau **1** ;
- Modélisation globale de l'action de **4** sur **1** en E par $\{\mathcal{T}_{4 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} T_{4 \rightarrow 1}\vec{x} + N_{4 \rightarrow 1}\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_E$;
- Angle d'adhérence entre le rouleau **1** et la courroie **4** : $\varphi = 30^\circ$;
- Poids des pièces négligés ;
- Rayon du rouleau plein $R = 0.6$ m ;
- Couple résistant au démarrage du rouleau, appliqué sur l'axe (A, \vec{z}) : $C_r = -176$ N.m (donné par une étude dynamique).

Objectif

On cherche à déterminer la section utile S_u du vérin.

Question 27 On suppose qu'au démarrage, le rouleau **1** est en équilibre statique, sous l'action de

4 sur 1, de 3 sur 1, et du couple résistant $\vec{C}_r = C_r \vec{z}$. Donner l'expression de la résultante tangentielle $T_{4 \rightarrow 1}$ en fonction de C_r et R . Faire une application numérique.

On isole 1.

IAME sur 1 :

- Action de 4 sur 1 ;
- Action de 3 sur 1 – pivot d'axe (A, \vec{z}) ;
- Action de la résistance sur 1 – couple résistant C_r .

PFS à 1 en modélisation plane dans le plan (E, \vec{x}, \vec{y}) :

$$\{\mathcal{T}_{4 \rightarrow 1}\}_E = \left\{ \begin{array}{c} T_{4 \rightarrow 1} \vec{x} + N_{4 \rightarrow 1} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 1}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{3 \rightarrow 1} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \{\mathcal{T}_{r \rightarrow 1}\}_{\forall P} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_r \vec{z} \end{array} \right\}$$

Résolution :

Pour se débarrasser de $\vec{R}_{3 \rightarrow 1}$, il faut appliquer le théorème du moment statique en A .

$$\sum \vec{M}_{A, \bar{i} \rightarrow 1} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{A, 4 \rightarrow 1} + \vec{M}_{A, 3 \rightarrow 1} + \vec{M}_{A, r \rightarrow 1} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{E, 4 \rightarrow 1} + \vec{AE} \wedge \vec{R}_{4 \rightarrow 1} + C_r \vec{z} = \vec{0}$$

$$-R.T_{4 \rightarrow 1} \vec{z} + C_r \vec{z} = \vec{0}$$

$$T_{4 \rightarrow 1} = \frac{C_r}{R} = \frac{-176}{0.6} \approx -293N$$

Question 28 En déduire l'expression de la résultante normale $N_{4 \rightarrow 1}$ en fonction de φ et $T_{4 \rightarrow 1}$. Faire l'application numérique. À la limite d'adhérence $\|T_{4 \rightarrow 1}\| = \mu_a \cdot \|N_{4 \rightarrow 1}\|$ avec $\mu_a = \tan \phi$.

$$\text{Donc } \|N_{4 \rightarrow 1}\| = \frac{\|T_{4 \rightarrow 1}\|}{\tan \phi}.$$

$$\|N_{4 \rightarrow 1}\| = \frac{\|-293\|}{\tan \phi} = 508 \Rightarrow N_{4 \rightarrow 1} = -508N$$

Question 29 En supposant que L est la largeur de la courroie et que la répartition de pression p entre la courroie 4 et le rouleau 1 est uniforme (c.f. FIGURE 2), déterminer l'expression de $N_{4 \rightarrow 1}$ en fonction de p , β , L et R . $\vec{N}_{4 \rightarrow 1} = \int d\vec{N}_{4 \rightarrow 1} = - \int dN_{4 \rightarrow 1} \vec{n} = - \int p.dS \vec{n} = \iint_{\varphi, \ell} -p.R.d\varphi.d\ell.(\cos \varphi \vec{y} + \sin \varphi \vec{x}) = -2.p.R.L. \sin \frac{\beta}{2} \vec{y}$

Pour les questions suivantes, on prendra $T_{4 \rightarrow 1} = -300$ N et $N_{4 \rightarrow 1} = -500$ N.

Question 30 En prenant $\beta = 30^\circ$, calculer la largeur L de la courroie, pour que la pression de contact p_1 ne dépasse 1 daN/cm².

$$L = \frac{500}{2 \times 10^5 \times 0.6 \times \sin 15^\circ} = 16.1 \text{ mm}$$

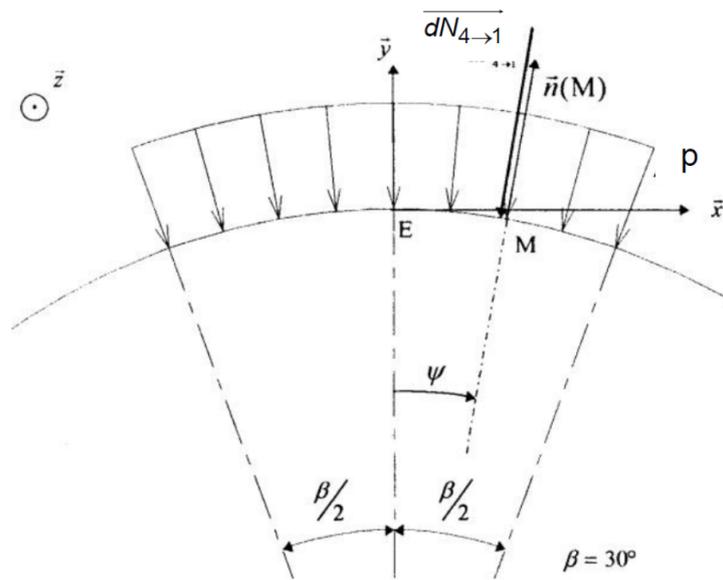


FIGURE 2 – Schéma de répartition des efforts. Les composantes élémentaires d'adhérence (ou de résistance au glissement) n'ont pas été représentées.

Question 31 Isoler $\{6+7\}$ et en déduire une relation entre $X_{6 \rightarrow 5}$, $Y_{6 \rightarrow 5}$ et les données géométriques c et d . **On isole 6 + 7.**

IAME sur 6 + 7 :

- Action de 5 sur 6 – pivot d'axe (F, \vec{z}) ;
- Action de 0 sur 7 – pivot d'axe (H, \vec{z}) .

PFS à 6 + 7 en modélisation plane dans le plan (E, \vec{x}, \vec{y}) :

$$\{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 6}\}_F = \begin{Bmatrix} -X_{6 \rightarrow 5} \vec{x} - Y_{6 \rightarrow 5} \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 7}\}_H = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{0 \rightarrow 7} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Résolution :

Pour se débarrasser de $\vec{R}_{0 \rightarrow 7}$, il faut appliquer le théorème du moment statique en H .

$$\sum \vec{M}_{H, \vec{s} \rightarrow S} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{H, 5 \rightarrow 6} + \vec{M}_{H, 0 \rightarrow 7} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{F, 5 \rightarrow 6} + \overrightarrow{HF} \wedge \vec{R}_{5 \rightarrow 6} = \vec{0}$$

$$(-c \vec{x} - d \vec{y}) \wedge (-X_{6 \rightarrow 5} \vec{x} - Y_{6 \rightarrow 5} \vec{y}) = \vec{0}$$

$$c.Y_{6 \rightarrow 5} - d.X_{6 \rightarrow 5} = 0$$

Question 32 En précisant le système isolé, déterminer une seconde relation entre $X_{6 \rightarrow 5}$, $Y_{6 \rightarrow 5}$, $T_{4 \rightarrow 1}$, $N_{4 \rightarrow 1}$ et les données géométriques a , b , δ et γ .

On isole 4 + 5.

IAME sur 4 + 5 :

- Action de 6 sur 5 – pivot d'axe (F, \vec{z}) ;
- Action de 0 sur 5 – pivot d'axe (G, \vec{z}) ;
- Action de 1 sur 4.

PFS à 4 + 5 en modélisation plane dans le plan (E, \vec{x}, \vec{y}) :

$$\{\mathcal{T}_{6 \rightarrow 5}\} = \underset{F}{\left\{ \begin{array}{c} X_{6 \rightarrow 5} \vec{x} + Y_{6 \rightarrow 5} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 5}\} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{0 \rightarrow 5} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 4}\} = \underset{E}{\left\{ \begin{array}{c} T_{1 \rightarrow 4} \vec{x} + N_{1 \rightarrow 4} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Résolution :

Pour se débarrasser de $\vec{R}_{0 \rightarrow 5}$, il faut appliquer le théorème du moment statique en G .

$$\sum \vec{M}_{G, \vec{s} \rightarrow S} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{G, 6 \rightarrow 5} + \vec{M}_{G, 0 \rightarrow 5} + \vec{M}_{G, 1 \rightarrow 4} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{F, 6 \rightarrow 5} + \vec{GF} \wedge \vec{R}_{6 \rightarrow 5} + \vec{M}_{E, 1 \rightarrow 4} + \vec{GE} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow 4} = \vec{0}$$

$$(a \vec{x} + b \vec{y}) \wedge (X_{6 \rightarrow 5} \vec{x} + Y_{6 \rightarrow 5} \vec{y}) + (\delta \vec{x} + \gamma \vec{y}) \wedge (T_{1 \rightarrow 4} \vec{x} + N_{1 \rightarrow 4} \vec{y}) = \vec{0}$$

$$a.Y_{6 \rightarrow 5} - b.X_{6 \rightarrow 5} + \delta.N_{1 \rightarrow 4} - \gamma.T_{1 \rightarrow 4} = 0$$

Question 33 En déduire $X_{6 \rightarrow 5}$, $Y_{6 \rightarrow 5}$ et $\|\vec{R}_{6 \rightarrow 5}\|$. Faire l'application numérique.

En reprenant les 2 équations trouvées, on détermine facilement $X_{6 \rightarrow 5} = \frac{c.(\gamma T_{1 \rightarrow 4} - \delta.N_{1 \rightarrow 4})}{a.d - b.c}$ et $Y_{6 \rightarrow 5} = \frac{d.(\gamma T_{1 \rightarrow 4} - \delta.N_{1 \rightarrow 4})}{a.d - b.c}$.

$$X_{6 \rightarrow 5} = -913N \text{ et } Y_{6 \rightarrow 5} = -181N$$

$$\|\vec{R}_{6 \rightarrow 5}\| = 980 \text{ N}$$

Question 34 Sachant que la pression d'huile p_h est de 6 bar, calculer la section utile S_u du vérin.

On isole 6.

IAME sur 6 :

- Action de 5 sur 6 – pivot d'axe (F, \vec{z}) ;
- Action du fluide sur 6 – pression du fluide ;
- Action de 7 sur 6 – pivot glissant d'axe \overline{HF} .

PFS à 6 en modélisation plane dans le plan (E, \vec{x}, \vec{y}) :

$$\{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 6}\} = \underset{F}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{5 \rightarrow 6} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad \{\mathcal{T}_{\text{fluide} \rightarrow 6}\} = \underset{\forall P \in \overline{HF}}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\text{fluide} \rightarrow 6} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad \{\mathcal{T}_{7 \rightarrow 6}\} = \underset{\forall P \in \overline{HF}}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{7 \rightarrow 6} \\ \vec{M}_{P, 7 \rightarrow 6} \end{array} \right\}}$$

avec $\vec{R}_{5 \rightarrow 6}$ suivant l'axe du piston, $\vec{R}_{fluide \rightarrow 6}$ suivant l'axe du piston (car la pression est uniforme),
 $\vec{R}_{7 \rightarrow 6} \cdot \vec{HF} = 0$ et $\vec{M}_{P,7 \rightarrow 6} \cdot \vec{HF} = 0$

Résolution :

Il faut appliquer le TRS en projection sur \vec{HF} pour se débarrasser de l'action mécanique $\vec{R}_{7 \rightarrow 6}$.

$$\vec{R}_{5 \rightarrow 6} \cdot \vec{HF} + \vec{R}_{fluide \rightarrow 6} \cdot \vec{HF} + \vec{R}_{7 \rightarrow 6} \cdot \vec{HF} = 0$$

$$\vec{R}_{5 \rightarrow 6} \cdot \vec{HF} + \vec{R}_{fluide \rightarrow 6} \cdot \vec{HF} = 0$$

Or $\vec{R}_{5 \rightarrow 6}$ et $\vec{R}_{fluide \rightarrow 6}$ sont suivant \vec{HF} , donc :

$$\left\| \vec{R}_{5 \rightarrow 6} \right\| = \left\| \vec{R}_{fluide \rightarrow 6} \right\| = p_h \cdot S_u \Rightarrow S_u = \frac{\left\| \vec{R}_{5 \rightarrow 6} \right\|}{p_h} = \frac{980}{0.6} = 1630 \text{ mm}^2$$