ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°60

Exercice 1 (***)

Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{B} = \sqrt{\mathrm{A}}$ l'unique matrice $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ solution de $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$. Montrer la continuité de cette application $\sqrt{\cdot}$.

Corrigé : On munit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit $(\mathrm{A}_k)_k \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{A}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{A}$. Pour tout k entier, il existe une unique matrice $\mathrm{B}_k \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}_k^2 = \mathrm{A}_k$. Il vient

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|\mathrm{B}_k\|^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}_k{}^\top \mathrm{B}_k) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}_k^2) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}_k)$$

Or, l'application Tr est linéaire donc continue sur l'espace E de dimension finie. Par conséquent, on a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$ et cette suite est donc bornée. Il en résulte que la suite $(\mathrm{B}_k)_k$ est bornée. Soit φ une extractrice telle que $\mathrm{B}_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}$. La matrice B est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ par fermeture de cet ensemble (voir décomposition de Cartan). Par continuité du produit matriciel, on a

$$\mathrm{A}_{\varphi(k)} = \mathrm{B}_{\varphi(k)}^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$$

Ainsi, la suite $(\mathrm{B}_k)_k$ est bornée et admet $\mathrm{B} = \sqrt{\mathrm{A}}$ pour unique valeur d'adhérence dans E espace de dimension finie. Il en résulte que $\mathrm{B}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } \sqrt{\cdot} \text{ est continue sur } \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

Exercice 2 (***)

Soit E euclidien.

1. Soit $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Établir $\qquad \max \mathrm{Sp}\,(u) = \underset{\|x\|=1}{\mathrm{Sup}}\, \langle u(x), x\rangle$

2. Soient u, v dans $\mathscr{S}(\mathrm{E})$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \max \mathrm{Sp}\,(u + tv)$$

   Montrer que la fonction f est convexe.

Corrigé : 1. D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Pour x vecteur normé de E, on note $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec les x_i coordonnées de x dans $\mathscr{B}$. On a

$$\langle u(x), x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \lambda_i x_i x_j \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_n$$

et l'inégalité est une égalité pour $x = e_n$. On conclut

$$\boxed{\max \mathrm{Sp}\,(u) = \underset{\|x\|=1}{\mathrm{Sup}}\, \langle u(x), x\rangle}$$

2. D'après ce qui précède, on a pour t réel

$$f(t) = \operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} \langle (u+tv)(x), x\rangle = \operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} (\langle u(x), x\rangle + t\langle v(x), x\rangle)$$

On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{E}\times\mathbb{R} \qquad h(x,t) = \langle u(x), x\rangle + t\langle v(x), x\rangle$

Soient a, b réels et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Il vient pour $x \in \mathrm{S}(0,1)$

$$h(x, \lambda a + (1-\lambda)b) = \lambda h(x,a) + (1-\lambda)h(x,b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Passant à la borne supérieure pour $x \in \mathrm{S}(0,1)$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe.}}$$

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}^\top \mathrm{P} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \mathrm{P}^\top \mathrm{DP}$$

2. Établir $\quad \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \qquad \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant \det \mathrm{A} + \det \mathrm{B}$

3. Le résultat précédent a-t-il lieu si on suppose seulement $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$?

Corrigé : 1. Il existe $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$ et $\det \mathrm{A} = (\det \mathrm{S})^2$ d'où $\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On peut donc écrire $\mathrm{B} = \mathrm{SCS}$ avec $\mathrm{C} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{BS}^{-1}$ qui est symétrique. Par suite, avec le théorème spectral, il existe $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telle que $\mathrm{C} = \mathrm{Q}^\top \mathrm{DQ}$. Posant $\mathrm{P} = \mathrm{QS}$, on a

$$\mathrm{P}^\top \mathrm{P} = \mathrm{SQ}^\top \mathrm{QS} = \mathrm{S}^2 = \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^\top \mathrm{DP} = \mathrm{SQ}^\top \mathrm{DQS} = \mathrm{SCS} = \mathrm{B}$$

et la matrice P est inversible comme produit de matrices inversibles. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{D} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ diagonale telles que } \mathrm{A} = \mathrm{P}^\top\mathrm{P} \text{ et } \mathrm{B} = \mathrm{P}^\top\mathrm{DP}.}$$

2. On applique le résultat précédent. On a

$$\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \det(\mathrm{P}^\top\mathrm{P} + \mathrm{P}^\top\mathrm{DP}) = \det(\mathrm{P}^\top)\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{D})\det \mathrm{P}$$

avec $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1\top}\mathrm{BP}^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, notant $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$, on a

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{DX}\rangle = \mathrm{Y}^\top \mathrm{P}^\top \mathrm{DPY} = \langle \mathrm{Y}, \mathrm{BY}\rangle \geqslant 0$$

d'où $\operatorname{Sp}(\mathrm{D}) \subset \mathbb{R}_+$, autrement dit les $\lambda_i \geqslant 0$. On a

$$\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{D}) = \prod_{i=1}^n (1+\lambda_i) \geqslant 1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i = 1 + \det \mathrm{D}$$

Ainsi $\qquad \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant \det(\mathrm{P}^\top)(1+\det \mathrm{D})\det \mathrm{P} = \det(\mathrm{P}^\top\mathrm{P}) + \det(\mathrm{P}^\top\mathrm{DP})$

On conclut $\qquad \boxed{\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \qquad \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant \det \mathrm{A} + \det \mathrm{B}}$

3. Si A ou B est dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il s'agit du résultat précédemment établi (par symétrie des rôles). Supposons A et B dans $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a $\mathrm{A}+\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ d'où $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant 0$ et $\det \mathrm{A} = \det \mathrm{B} = 0$ et par conséquent

$$\boxed{\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \qquad \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant \det \mathrm{A} + \det \mathrm{B}}$$

Exercice 4 (***)

Soit E euclidien et $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$.
2. Justifier l'existence de $g \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ tel que $g^2 = f^{-1}$.
3. Montrer que $(g(u_1), \ldots, g(u_n))$ est une base orthonormée de E.

Corrigé : 1. On a clairement $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$

$$\langle f(x), y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \langle y, u_i \rangle$$

expression symétrique en x et y et

$$\langle f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle^2 \geqslant 0$$

avec $$\langle f(x), x \rangle = 0 \iff x \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)^{\perp} = \mathrm{E}^{\perp} \iff x = 0_{\mathrm{E}}$$

Ainsi $$\boxed{f \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})}$$

2. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de vecteurs propres de f. On note $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On a f inversible puisque $\mathrm{Sp}\,(f) \subset \,]\,0\,; +\infty\,[$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f^{-1}$ est diagonale avec des termes diagonaux $\dfrac{1}{\lambda_i}$ strictement positifs ce qui prouve $f^{-1} \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$. On définit $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} g = \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}, \ldots, 1/\sqrt{\lambda_n})$ diagonale donc symétrique dans une base orthonormée. On a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} g^2 = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f^{-1}$ d'où

$$\boxed{\text{Il existe } g \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \text{ tel que } g^2 = f.}$$

3. On note $v_j = f^{-1}(u_j)$ pour tout $j \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Soit $(i, j) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^2$. On a

$$\langle g(u_i), g(u_j) \rangle = \langle u_i, g^2(u_j) \rangle = \langle u_i, f^{-1}(u_j) \rangle = \langle u_i, v_j \rangle$$

Or, on a $$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle v_j, u_i \rangle\, u_i = u_j$$

d'où $\langle v_j, u_i \rangle = \delta_{i,j}$ par liberté de $(u_1, \ldots, u_n)$. Ainsi

$$\boxed{\text{La famille } (g(u_1), \ldots, g(u_n)) \text{ est une base orthonormée de E.}}$$

Exercice 5 (****)

Soit E euclidien et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer qu'il existe $(y_1, \ldots, y_n)$ famille de vecteurs normés de E vérifiant $\|y_i - y_j\| = 1$ pour tout $i \neq j$ et

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{Vect}\,(y_1, \ldots, y_k)$$

Corrigé : Une famille de vecteurs de E normés et équidistants est dite *régulière*. Par orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe $(u_1, \ldots, u_n)$ famille orthonormée de E qui vérifie le grossissement simultané

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k)$$

On pose $\mathrm{G} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{J} + \mathrm{I}_n)$ avec $\mathrm{J} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ matrice constituée de 1. On montre que G est orthogonalement semblable à $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{diag}(n+1, \mathrm{I}_{n-1})$. Par conséquent, il existe $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{G} = \mathrm{S}^2 = \mathrm{S}^\top\mathrm{S}$. On pose

$$\forall j \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad v_j = \sum_{i=1}^{n} s_{i,j} u_i$$

Ainsi $$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} s_{i,k} s_{j,k} = (\mathrm{S}^\top\mathrm{S})_{i,j}$$

Par construction, la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est régulière mais on n'a pas *a priori* le grossissement simultané. La matrice G est inversible et par propriété sur les matrices de Gram

$$\mathrm{rg}\,(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{rg}\ \mathrm{G} = n$$

autrement dit, la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt de $(v_1, \ldots, v_n)$. On définit $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ par

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad f(\varepsilon_i) = u_i$$

et on pose $$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad y_i = f(v_i)$$

L'application f étant une isométrie, on a

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \|y_i\| = \|f(v_i)\| = \|v_i\| = 1$$

et $$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \|y_i - y_j\| = \|f(v_i - v_j)\| = \|v_i - v_j\| = \delta_{i,j}$$

Ainsi, la famille $(y_1, \ldots, y_n)$ est régulière. Enfin, pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, sachant $\mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}\,(y_1, \ldots, y_k) &= \mathrm{Vect}\,(f(v_1), \ldots, f(v_k)) \\ &= \mathrm{Vect}\,(f(\varepsilon_1), \ldots, f(\varepsilon_k)) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k) \end{aligned}$$

ce qui prouve le grossissement simultané. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe une famille régulière qui vérifie le grossissement simultané avec } (x_1, \ldots, x_n).}$$

Exercice 6 (****)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$. On note

$$\mathcal{S}_\alpha = \{\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \mid \det \mathrm{M} \geqslant \alpha\}$$

Établir $$\operatorname*{Inf}_{\mathrm{M} \in \mathcal{S}_\alpha} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = n\,(\alpha \det \mathrm{A})^{\frac{1}{n}}$$

Corrigé : Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$. Par propriété fondamentale de la trace, on a

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{S}_\alpha \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{SMS})$$

On a clairement $\mathrm{SMS} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \langle \mathrm{X}, \mathrm{SMSX} \rangle = \langle \mathrm{SX}, \mathrm{M}(\mathrm{SX}) \rangle \geqslant 0$$

d'où $\mathrm{SMS} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et par suite $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{SMS}) \geqslant 0$ puisque $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{SMS}) \subset [\,0\,; +\infty\,[$. Supposons $0 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$. D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Soit $\mathrm{M} = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\beta, \varepsilon \mathrm{I}_{n-1})\mathrm{P}^\top$ avec $\varepsilon > 0$ et $\beta \geqslant \alpha\varepsilon^{1-n}$. Par construction, on a $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_\alpha$ et on trouve $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = \varepsilon\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$. On peut donc rendre $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM})$ arbitrairement arbitrairement petit d'où, pour $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \smallsetminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

$$\underset{\mathrm{M}\in\mathcal{S}_\alpha}{\mathrm{Inf}}\ \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = 0 = n\,(\alpha \det \mathrm{A})^{\frac{1}{n}}$$

Supposons désormais $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. La racine carrée S est également dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. L'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{SMS}$ réalise alors une bijection de $\mathcal{S}_\alpha$ dans $\mathcal{S}_{\alpha \det \mathrm{A}}$ de réciproque $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{S}^{-1}\mathrm{NS}^{-1}$. Ainsi, on a

$$\underset{\mathrm{M}\in\mathcal{S}_\alpha}{\mathrm{Inf}}\ \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = \underset{\mathrm{M}\in\mathcal{S}_\alpha}{\mathrm{Inf}}\ \mathrm{Tr}\,(\mathrm{SMS}) = \underset{\mathrm{M}\in\mathcal{S}_{\alpha \det \mathrm{A}}}{\mathrm{Inf}}\ \mathrm{Tr}\ \mathrm{M}$$

Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, la matrice M est diagonalisable d'après le théorème spectral et par inégalité arithmético-géométrique, le spectre de M étant inclus dans $[\,0\,;+\infty\,[$, on trouve

$$(\det \mathrm{M})^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\ \mathrm{M}$$

avec les μ_i valeurs propres de M et par suite

$$\underset{\mathrm{M}\in\mathcal{S}_{\alpha \det \mathrm{A}}}{\mathrm{Inf}}\ \mathrm{Tr}\ \mathrm{M} \geqslant n\,(\alpha \det \mathrm{A})^{\frac{1}{n}}$$

Cette inégalité est une égalité pour $\mathrm{M} = (\alpha \det \mathrm{A})^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{I}_n$ qui est bien dans $\mathcal{S}_{\alpha \det \mathrm{A}}$. On conclut

$$\boxed{\underset{\mathrm{M}\in\mathcal{S}_\alpha}{\mathrm{Inf}}\ \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = n\,(\alpha \det \mathrm{A})^{\frac{1}{n}}}$$

Exercice 7 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. Montrer

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S}(0, \sqrt{n}) \cap \det{}^{-1}\,(\{-1, 1\})$$

Corrigé : On a clairement

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{S}(0, \sqrt{n}) \cap \det{}^{-1}\,(\{-1, 1\})$$

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{S}(0, \sqrt{n}) \cap \det^{-1}(\{-1, 1\})$. D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $\mathrm{M}^\top\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^\top$. On observe

$$1 = (\det \mathrm{M})^2 = \det(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}) = \det \mathrm{D} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,\left(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\right) = \frac{1}{n}\|\mathrm{M}\|^2 = 1$$

On a clairement $\mathrm{M}^\top\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ d'où $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Ainsi, d'après l'inégalité arithmético-géométrique, on obtient

$$1 = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^n = 1$$

ce qui prouve qu'il s'agit du cas d'égalité dans cette inégalité d'où l'égalité des λ_i entre eux. Il en résulte $\lambda_i = 1$ pour tout $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$ ce qui prouve que $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ est semblable à I_n donc égale à I_n. On conclut

$$\boxed{\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S}(0, \sqrt{n}) \cap \det{}^{-1}\,(\{-1, 1\})}$$

Lemme 1. *Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs. On a*

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n$.

Preuve : Prouvons le cas d'égalité. Le cas d'égalité est trivial si l'un des x_i est nul. Supposons les $x_i > 0$. Le sens indirect est immédiat. Supposons les x_i non tous égaux, par exemple $x_1 \neq x_2$ sans perte de généralité. On pose $y_1 = y_2 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ puis $y_i = x_i$ pour $i \in [\![3\,;\, n]\!]$. On a

$$\prod_{i=1}^{n} x_i < \prod_{i=1}^{n} y_i \iff x_1 x_2 < \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \iff (x_1 - x_2)^2 > 0$$

ce qui est vrai. Supposons $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. En observant $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, il vient

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} < \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ce qui est absurde. Le résultat suit.