ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°58

Exercice 1 (*)

Déterminer $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ vérifiant $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

Exercice 2 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Que vaut $\langle \mathrm{AX}, \mathrm{X}\rangle$ pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?

Exercice 3 (*)

Montrer que le théorème spectral est une équivalence, à savoir pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E euclidien

$$u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \iff \text{il existe une base orthonormée de vecteurs propres de } u$$

Exercice 4 (*)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Établir l'égalité $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\, u$.

Exercice 5 (*)

Soit E euclidien et u, v dans $\mathscr{S}(\mathrm{E})$. Montrer

$$u \circ v \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \iff u \circ v = v \circ u$$

Exercice 6 (*)

Déterminer les matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{MM}^\top\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$.

Exercice 7 (*)

Déterminer les matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{M}^3 - 3\mathrm{M}^2 + 2\mathrm{M} = 0$ et $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$.

Exercice 8 (**)

Soit $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\}$. On pose $\mathrm{M} = \mathrm{UU}^\top$. Montrer que M est diagonalisable puis préciser ses éléments propres.

Exercice 9 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$ puis montrer qu'on peut choisir $\mathrm{S} \in \mathbb{R}[\mathrm{A}]$.

Exercice 10 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$.

On pose $\qquad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X})\mathrm{P}'' + (2\mathrm{X} - 1)\mathrm{P}'$

Montrer que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$.

Exercice 11 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer $\qquad (\det \mathrm{A})^{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n} \operatorname{Tr}(\mathrm{A})$

Exercice 12 (**)

Montrer $\qquad \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Exercice 13 (**)

Déterminer a et b réels non nuls tels que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ puis décrire l'isométrie associée dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté.

Exercice 14 (**)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et S sa partie symétrique. Montrer

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}) \subset [\,\min \operatorname{Sp}(\mathrm{S})\,; \max \operatorname{Sp}(\mathrm{S})\,]$$

Exercice 15 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Montrer

$$\operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} |\langle u(x), x \rangle| = \max \{|\lambda|\,, \lambda \in \operatorname{Sp}(u)\}$$