ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°59

Exercice 1 (**)

Soit E euclidien et p, q des projecteurs orthogonaux de E. On note $u = p + q$.

1. Montrer que χ_u est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ puis établir $\mathrm{Sp}\,(u) \subset [\,0\,;2\,]$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Ker}\,(u - 2\,\mathrm{id}\,)$.

Exercice 2 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ tel que $u(x) \perp x$.
2. En déduire l'existence d'une base orthonormée $(e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ de E telle que $\langle u(e_i), e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$.

Exercice 3 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$. Montrer qu'il existe un unique $g \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ tel que $f = g^2$.

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et φ définie sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^\top \mathrm{S}\mathrm{X} - 2\mathrm{X}^\top \mathrm{B}$$

Montrer que φ admet un minimum et préciser où il est atteint.

Exercice 5 (**)

Soit E euclidien de dimension n et $f \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f.

1. Montrer que $\quad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x \rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2$.
2. Montrer que si une des inégalités est une égalité avec $x \neq 0$, alors x est vecteur propre.
3. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $\langle f(e_i), e_i \rangle = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$.

   Montrer $$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad f(e_i) = \lambda_i e_i$$

Exercice 6 (***)

Montrer $$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})^2 \qquad 0 \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})$$

Exercice 7 (***)

Soit E euclidien de dimension n, $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ et $\mathrm{G} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{G} = \big(\langle u_i, u_j \rangle\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Montrer que $\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Application : Montrer qu'il existe $(v_1, \ldots, v_n)$ famille de vecteurs normés de E telle que $\|v_i - v_j\| = 1$ pour tout $i \neq j$.

Exercice 8 (***)

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $\underset{P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Max}} \operatorname{Tr}(PA)$.

Exercice 9 (****)

1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ uniques telles que $A = OS$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.
3. A-t-on l'unicité dans la question précédente ?

Exercice 10 (****)

Montrer que l'application

$$\varphi \colon \begin{cases} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \qquad (O, S) \qquad \longmapsto OS \end{cases}$$

est un *homéomorphisme*, *i.e.* une application bijective, continue dont la réciproque est continue.

Exercice 11 (***)

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12 (***)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^\top A \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe U, V dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et α_1, …, α_n des réels positifs tels que

$$A = U\Delta V \quad \text{avec} \quad \Delta = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$