

# Concours Blanc du 6/01/24

## Epreuve de Physique

4h

### Calculatrices interdites

*Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.*

*La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.*

*On laissera une marge à gauche de chaque page pour la correction.*

# Problème 1 : Principe d'un traitement antireflet

Le traitement antireflet d'un verre de lunette permet d'améliorer la netteté, le contraste, la vision des couleurs et présente également de nombreux autres avantages, y compris esthétiques. La partie I consiste en une étude descriptive du phénomène ; la partie II proposant quant à elle une étude plus théorique. La partie III traite du principe de fonctionnement d'une diode à l'échelle microscopique.

Dans tout le problème,  $c$  désigne la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide et  $j$  le nombre imaginaire pur tel que  $j^2 = -1$ . L'indice de l'air sera pris à un et  $\lambda$  désigne la longueur d'onde, dans l'air, d'une radiation monochromatique.

On rappelle la formule :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}(\vec{a})) = \overline{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \overline{\Delta}(\vec{a})$$

## I Principe d'un traitement antireflet

### I.A – Intensités lumineuses transmises et réfléchies pour un verre simple

Considérons un rayon incident arrivant sur une lame de verre d'indice  $n = 1,5$  baignée dans l'air. Le tableau figure 1 indique les pourcentages des intensités des rayons considérés par rapport au rayon incident, noté 0. D'autres rayons existent mais n'ont pas été représentés.

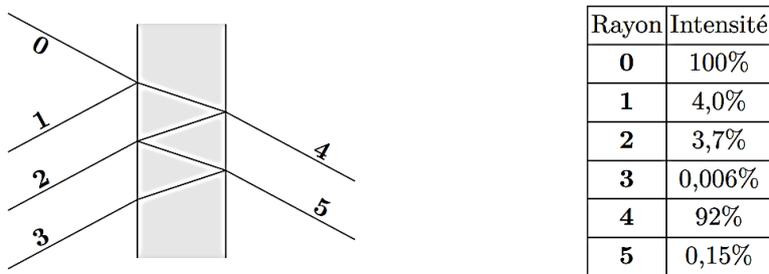


Figure 1

À l'aide de la figure 1, indiquer quelle est l'intensité lumineuse réfléchie sur le verre de lunette et comparer celle-ci à l'intensité transmise.

### I.B – Traitement antireflet

Un traitement antireflet monocouche consiste à recouvrir la surface du dioptre par une couche d'un matériau sur une épaisseur  $e$  comme indiqué sur le schéma de principe figure 2. La lumière incidente est supposée monochromatique de longueur d'onde dans l'air  $\lambda$ .

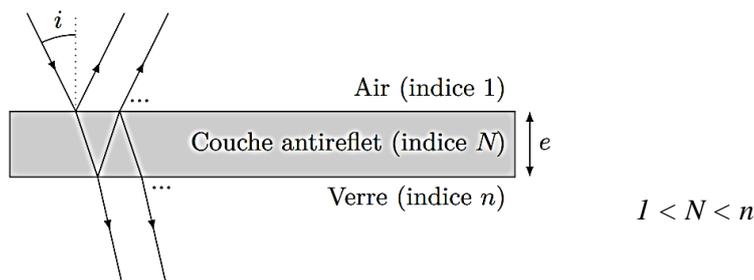


Figure 2

Le principe du traitement est d'utiliser un système interférentiel. L'épaisseur choisie pour la couche est  $e = \frac{\lambda}{4N}$ .

**I.B.1)** Préciser pourquoi les différentes ondes réfléchies peuvent interférer entre elles.

**I.B.2)** En considérant un éclairage sous incidence normale ( $i = 0^\circ$ ) et en traduisant la condition d'interférence destructive entre les ondes 1 et 2, justifier l'expression de  $e$ . Quelles autres valeurs pourraient éventuellement être choisies ?

**I.B.3)** Quelle longueur d'onde va-t-on choisir pour calculer  $e$  ?

**I.B.4)** Citez un autre paramètre ayant une influence sur l'épaisseur choisie à  $N$  et  $\lambda$  fixés ?

### I.C – Courbes de ZEISS

Les courbes de ZEISS fournissent en fonction de la longueur d'onde de la radiation incidente les pourcentages des intensités lumineuses réfléchies.

La figure 3 fournit les courbes de ZEISS pour un verre minéral avec et sans traitement monocouche.

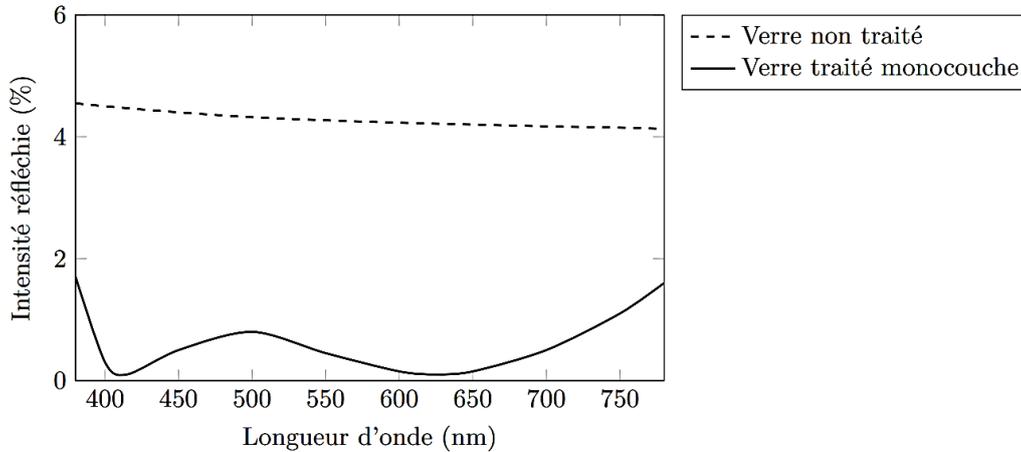


Figure 3

I.C.1) Que remarque-t-on dans le cas non traité ?

I.C.2) Que peut-on dire de la radiation 625 nm ?

I.C.3) Proposer une explication pour le fait qu'il y a deux minima sur la courbe. La tester quantitativement et conclure.

## II Étude de la réflexion d'une onde électromagnétique

Dans cette partie nous allons nous intéresser à des milieux isolants non chargés, transparents et non absorbants. On admet que les propriétés de ces milieux sont semblables à celles du vide en remplaçant la permittivité  $\epsilon_0$  par  $\epsilon_0 \epsilon_r$ ,  $\epsilon_r$  désignant la permittivité relative du milieu. (Vide sans charge ni courant)

### II.A – Propagation d'une onde électromagnétique dans un matériau isolant non chargé

II.A.1) Écrire les équations de Maxwell dans le milieu considéré en précisant leur nom.

II.A.2) Établir l'équation de propagation du vecteur champ électrique dans le milieu.

II.A.3) Exprimer la célérité de propagation de l'onde électromagnétique dans le milieu et montrer que son indice est alors  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ .

II.A.4) On considère une onde plane progressive monochromatique se propageant vers les  $x$  croissants de la forme

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

a) L'onde plane progressive est-elle polarisée rectilignement ? Si oui, dans quelle direction ?

b) Déterminer l'expression du vecteur d'onde  $\vec{k}$  en fonction de  $n$ ,  $\omega$ ,  $c$  et d'un vecteur unitaire.

c) Déterminer l'expression du vecteur champ magnétique associé.

### II.B – Coefficients de transmission et réflexion en énergie à l'interface entre deux milieux

On s'intéresse à l'interface suivante entre deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$ , séparés par le plan  $x = 0$ .

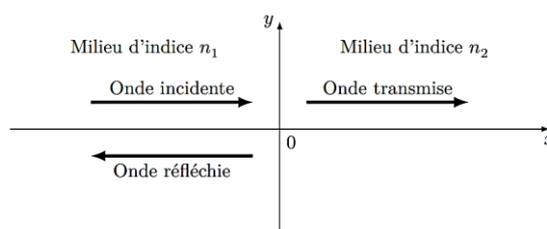


Figure 4

On considère une onde électromagnétique incidente, le vecteur champ électrique étant  $\vec{E}_{\text{incident}} = \vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - k_1 x) \vec{u}_y$ . On note  $\vec{E}_{\text{réfléchi}} = \vec{E}_2 = \rho E_0 \cos(\omega t + k_2 x) \vec{u}_y$  le champ électrique réfléchi et  $\vec{E}_{\text{transmis}} = \vec{E}_3 = \tau E_0 \cos(\omega t - k_3 x) \vec{u}_y$  où  $\rho$  et  $\tau$  désignent respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

**II.B.1)** Justifier les formes des champs réfléchi et transmis fournis. (rapidement)

**II.B.2)** Quelle relation existe entre  $k_1$  et  $k_2$  ainsi qu'entre  $k_2$  et  $k_3$  ?

**II.B.3)** Déterminer les expressions des champs magnétiques associés  $\vec{B}_{\text{incident}}$ ,  $\vec{B}_{\text{réfléchi}}$  et  $\vec{B}_{\text{transmis}}$ , notés respectivement  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$  et  $\vec{B}_3$ .

**II.B.4)** Les champs électriques et magnétiques doivent vérifier des relations dites de passage à l'interface entre les deux milieux. Compte tenu des propriétés des deux milieux, on admet que les champs électrique et magnétique sont continus à l'interface.

Traduire ces deux relations et en déduire que  $\rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$  et  $\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$ .

**II.B.5)** Déterminer les expressions des vecteurs de Poynting pour les ondes incidente, réfléchie et transmise.

**II.B.6)** Déterminer les expressions des coefficients de réflexion et transmission en énergie à l'interface, notés respectivement R et T. Vérifier la relation qui traduit la conservation de l'énergie.

### II.C – Condition sur l'indice de la couche antireflet

Un rayon incident arrive sous incidence normale sur une couche antireflet d'épaisseur  $e$  et d'indice  $N$ ; celle-ci recouvrant un matériau d'indice  $n$ .

Compte tenu des différentes interfaces, plusieurs rayons vont être réfléchis et transmis comme indiqué figure 5. On supposera  $1 < N < n$ .

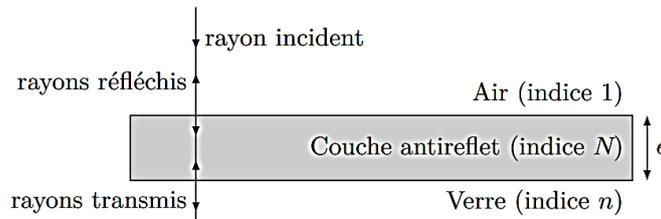


Figure 5

On note respectivement  $\rho_{n_1 \rightarrow n_2}$  et  $\tau_{n_1 \rightarrow n_2}$  les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour une interface de type  $n_1 \rightarrow n_2$ ,  $n_1$  étant l'indice du milieu associé à l'onde incidente.

**II.C.1)** Donner les expressions des coefficients  $\rho_{1 \rightarrow N}$ ,  $\rho_{N \rightarrow n}$ ,  $\tau_{1 \rightarrow N}$  et  $\tau_{N \rightarrow n}$ .

**II.C.2)** Soit  $\underline{E}_0$  l'amplitude complexe du champ électrique associée à l'onde incidente.

L'amplitude complexe de la première onde réfléchie s'écrit alors  $\rho_{1 \rightarrow N} \underline{E}_0$ .

a) Justifier que l'amplitude complexe de la seconde onde réfléchie est  $\underline{E}_0 \tau_{1 \rightarrow N} \rho_{N \rightarrow n} \tau_{N \rightarrow 1} e^{j\varphi} = \underline{a}$  avec  $\varphi = \frac{4\pi N e}{\lambda}$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide.

b) Exprimer alors les amplitudes complexes des ondes réfléchies suivantes en fonction de  $\underline{a}$ ,  $\varphi$  et des différents coefficients de réflexion et transmission.

c) En remarquant que  $\tau_{1 \rightarrow N} \tau_{N \rightarrow 1} = 1 - \rho_{1 \rightarrow N}^2$ , montrer que l'amplitude complexe résultante pour les ondes réfléchies est :  $\underline{A} = \frac{\underline{A}' \rho_{1 \rightarrow N} + \rho_{N \rightarrow n} e^{j\varphi}}{1 + \rho_{1 \rightarrow N} \rho_{N \rightarrow n} e^{j\varphi}}$  où  $\underline{A}' = K \underline{E}_0$  avec K un facteur numérique à préciser.

d) Quelles sont les valeurs possibles de  $\varphi$  permettant des interférences destructives ?

e) Montrer que l'intensité réfléchie peut s'annuler pour une valeur particulière de  $N$ . à préciser. Commenter.

## III Étude et application d'une diode au silicium

### III.A – Étude d'une diode au silicium

Une diode au silicium est en fait constituée d'une jonction de deux semi-conducteurs dopés, l'un de type « P » et l'autre de type « N ».

Dans ces deux zones, on ajoute, en quantité limitée, des impuretés dans le silicium de telle façon que la zone « N » contient une majorité d'électrons et une minorité de trous « + » (d'où sa charge négative) alors que la zone « P » contient une majorité de trous « + » et une minorité d'électrons (d'où sa charge positive) comme illustré figure 6 où seuls les porteurs majoritaires ont été représentés.

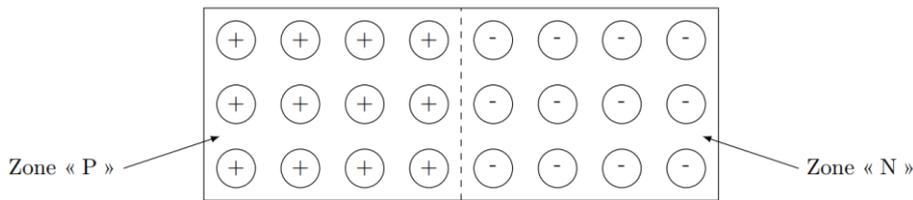


Figure 6

La proximité de ces deux zones va entraîner une migration des trous vers la zone « N » ainsi que des électrons vers la zone « P ».

Lorsqu'un électron migre vers la zone « P », il va se recombiner avec un trou et cela entraîne l'apparition d'un trou dans la zone « N » ; un raisonnement analogue peut être tenu en ce qui concerne la migration d'un trou « P » vers la zone « N ».

Tout ceci entraîne une zone appelée zone de charge d'espace, notée ZCE, dans laquelle la zone « N » se trouve localement chargée positivement et la zone « P » chargée négativement comme illustré figure 7.

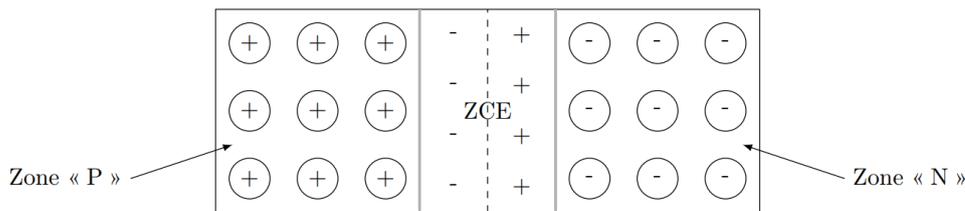


Figure 7

III.A.1) Préciser pourquoi la ZCE est nécessairement limitée dans l'espace.

III.A.2) On se propose d'étudier le vecteur champ électrostatique dans la ZCE.

La zone de charge d'espace est modélisée par deux distributions uniformes, l'une de densité volumique  $\rho_1 > 0$  entre les plans d'équations  $x = 0$  et  $x = a$ , l'autre de densité volumique  $\rho_2 < 0$  située entre les plans d'équations  $x = -b$  et  $x = 0$ .

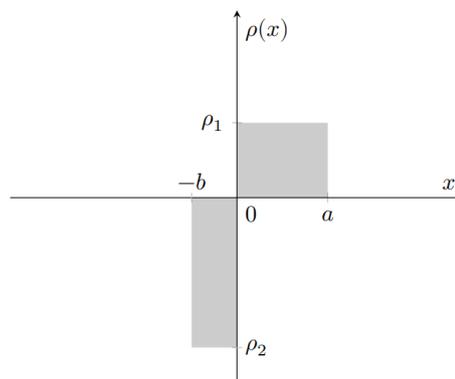


Figure 8

a) La ZCE étant globalement neutre, déterminer la relation entre  $a$ ,  $b$ ,  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

b) On considère le cas d'une distribution uniforme de densité volumique  $\rho_0$  comprise entre les plans d'équations  $x = -\frac{d}{2}$  et  $x = +\frac{d}{2}$  où  $d$  est une largeur.

i. Démontrer soigneusement que le vecteur champ électrostatique créé par cette distribution en tout point  $M$  de l'espace est de la forme  $\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}_x$ .

ii. À l'aide du théorème de Gauss, déterminer soigneusement l'expression de  $E(x)$  en tout point de l'espace.

c) À l'aide du principe de superposition, déterminer le vecteur champ électrostatique en tout point  $M$  de la ZCE précédemment décrite. On exprimera  $E(x)$  en fonction de  $x$ ,  $\rho_1$ ,  $a$  et  $b$ .

d) Représenter les variations de  $E(x)$  pour  $x$  variant de  $-b$  à  $a$ .

e) À l'aide de l'étude précédente, indiquer la valeur minimale de la tension  $U = V_P - V_N$  à appliquer afin qu'un courant circule dans la diode.

## Problème 2 : Vérification de la loi de Gladstone-Dale

Ce sujet étudie la loi de Gladstone-Dale relative à la variation de l'indice de l'air en fonction de la pression et la température.

Les vecteurs sont surmontés d'une flèche ( $\vec{E}$ ) ou d'un chapeau s'ils sont unitaires ( $\hat{u}$ ). Par défaut, la norme d'un vecteur  $\|\vec{E}\|$  est notée simplement  $E$ . La mesure algébrique d'un vecteur sur un axe est indiquée par le paramètre représentant l'axe, nous notons ainsi  $E_z = \vec{E} \cdot \hat{u}_z$ .

Les valeurs des constantes fondamentales nécessaires à la résolution du problème sont regroupées dans une annexe à la fin de l'énoncé. Vous y trouverez également un rappel de quelques fonctions de trigonométrie hyperbolique et du théorème de Schwarz.

Sauf indication contraire, les applications numériques seront des ordres de grandeur qui comporteront toujours deux chiffres significatifs. Le nombre complexe  $i$  est tel que  $i^2 = -1$ .

Après avoir étudié les propriétés optiques de différents liquides dans le domaine du visible, Gladstone et Dale ont proposé en 1858 une loi empirique relative à l'indice de réfraction, noté  $n$ , indiquant que  $n - 1$  est proportionnel à la masse volumique du liquide. Cette loi a ensuite été étendue au cas du fluide diélectrique homogène et isotrope, comme le sont les gaz et les mélanges de gaz. Cette partie du sujet propose une vérification expérimentale de cette loi pour l'air, et une explication théorique rudimentaire.

Nous notons  $n_0$  l'indice de l'air à la pression  $p_0$  et à la température  $T_0$  ambiantes dans le laboratoire. Nous rappelons que l'indice de réfraction d'un milieu est défini par le rapport de la vitesse  $c$  de la lumière dans le vide sur la vitesse de phase  $v$  de la lumière dans le milieu considéré, soit  $n = \frac{c}{v}$ , cet indice est généralement plus grand que 1.

□ 1 — Montrez que, sous réserve d'une approximation usuelle que vous préciserez, la loi de Gladstone-Dale, pour l'air, conduit à écrire que  $n - 1$  est proportionnel au rapport de la pression sur la température de l'air. En travaillant à température constante, montrez que la variation d'indice  $n - n_0$  est proportionnelle à la variation de pression.

Nous posons par la suite  $n - n_0 = \frac{a}{T_0} (p - p_0)$  où  $a$  est une constante qui dépend de la composition de l'air (humidité, taux de  $\text{CO}_2$ , ...).

□ 2 — La variation de l'indice de l'air avec la pression est très faible, mais parfaitement mesurable avec un instrument très sensible comme l'interféromètre de Michelson. L'interféromètre est éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide, et réglé de façon à observer des anneaux sur un écran. Représentez, sur un schéma symbolique, un interféromètre de Michelson en précisant la position de la source lumineuse et de l'écran. Des lentilles minces dont vous préciserez le rôle sont à utiliser. La lame séparatrice sera représentée par un simple trait. Quelle est la position relative des miroirs ? Nous notons  $f'$  la distance focale de la lentille de projection. Déduisez-en la différence de marche  $\delta$  induite par l'interféromètre dans cette configuration en précisant vos notations. En supposant que le centre de la figure d'interférence est un point brillant d'éclairement maximal, donnez le rayon du  $k^{\text{ième}}$  anneau brillant en fonction de  $k$ ,  $f'$ ,  $\lambda$  et  $\delta_0$  la différence de marche au centre de la figure. On supposera les angles des rayons lumineux par rapport à l'axe optique de la lentille suffisamment petits pour en négliger l'ordre 3 devant les précédents.

Une cuve est introduite entre un miroir de l'interféromètre et la lame séparatrice. Cette cuve contient de l'air dont on peut faire varier la pression par une simple pompe à main. Un manomètre permet de mesurer la pression relative atteinte. En gonflant lentement, l'air de la cuve reste sensiblement à température ambiante. Une microfuite permet ensuite de ramener très lentement la pression de la cuve à  $p_0$ . Dans votre analyse, la cuve sera idéalisée et vous êtes invités à négliger le rôle des parois du dispositif.

Une photodiode est placée à la place de l'écran au centre de la figure d'interférence et permet de décompter le nombre de franges brillantes  $N$  qui défilent lentement lors de la diminution de la pression dans la cuve. La longueur de la cuve traversée par les rayons lumineux est  $L = 4$  cm.

□ 3 — Reliez la différence de marche supplémentaire due à la présence de la cuve à la variation d'indice  $n - n_0$ , puis au nombre de franges  $N$ , sur la frange centrale éclairant la photodiode. Déduisez-en l'expression de  $N$  en fonction notamment de  $a$  et de la variation de pression  $p - p_0$  dans la cuve. (N dépend aussi de  $L$  et  $T_0$  et  $\lambda_0$ )

□ 4 — Pour  $T_0 = 300$  K et  $\lambda = 530$  nm, le tableau suivant donne le nombre de franges  $N$  pour quelques valeurs de surpression  $p - p_0$  exprimées en bar :

|           |   |     |     |    |     |     |     |    |     |     |
|-----------|---|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|
| $p - p_0$ | 0 | 0,5 | 0,7 | 1  | 1,3 | 1,5 | 1,8 | 2  | 2,3 | 2,5 |
| $N$       | 0 | 17  | 26  | 40 | 56  | 68  | 82  | 92 | 102 | 111 |

Calculez numériquement le coefficient  $a$  en détaillant votre démarche. Si vous aviez disposé d'un outil d'analyse numérique (calculatrice, ordinateur + python, etc...), comment aurait-on pu exploiter ces données ?

Nous utilisons par la suite la valeur en ordre de grandeur de  $a = 1,0 \times 10^{-6}$  K · Pa<sup>-1</sup>

La loi empirique de Gladstone-Dale pour l'air peut être expliquée dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié. Nous assimilons une molécule d'un gaz composant l'air à un noyau et deux électrons optiquement actifs. Nous notons  $\vec{r}(t)$  le vecteur position d'un électron par rapport au noyau,  $\vec{v}(t)$  sa vitesse,  $m_e$  la masse de l'électron et  $-e$  sa charge électrique. L'interaction entre le noyau et l'électron est modélisée par deux forces s'exerçant sur l'électron : une force de rappel élastique  $-m_e\omega_0^2\vec{r}$  et une force de frottement fluide  $-m_e\Gamma\vec{v}$ . L'électron est soumis au champ électrique de l'onde plane que nous considérons localement identique à  $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$ .

□ 5 — Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la position de l'électron. Pourquoi n'avons nous pas pris en compte l'effet du champ magnétique de l'onde sur l'électron ? Nous nous intéressons à la solution en régime forcé de cette équation. En utilisant la notation complexe, donnez l'expression de la vitesse  $\vec{v}$  d'un électron en fonction du champ électrique.

□ 6 — Pourquoi ne prenons-nous pas en compte le mouvement des noyaux des molécules induit par le champ électrique de l'onde plane ? Montrez alors que le vecteur densité de courant électronique total peut s'écrire :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\kappa n^* e^2}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}$$

où  $\kappa$  est un facteur numérique que l'on déterminera et  $n^*$  est le nombre volumique, c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de volume du gaz.

□ 7 — À quel type de filtre correspond  $\gamma$ ? Soit  $\gamma_0$  le maximum du module de  $\gamma$ , déterminez l'expression de  $\gamma_0$ . Nous définissons la fonction de transfert  $H(\omega) = \frac{\gamma}{\gamma_0}$ , exprimez cette fonction de transfert et précisez l'expression de son facteur de qualité  $Q$ . Représentez le gain de ce filtre dans un diagramme de Bode pour un facteur de qualité de l'ordre de la centaine.

□ 8 — L'air est assimilé à un milieu neutre électriquement mais polarisable : une onde électromagnétique dans le domaine du visible induit un mouvement des électrons qui se traduit par l'apparition d'un vecteur densité de courant selon la question précédente. Donnez alors les équations de Maxwell dans ce milieu. Montrer qu'en introduisant une permittivité relative  $\epsilon_r$  complexe que l'on identifiera, on peut écrire l'équation de propagation pour le champ électrique sous la forme  $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ . Exprimer  $\epsilon_r$  en fonction de  $\gamma$ ,  $\epsilon_0$  et  $\omega$ .

□ 9 — On néglige les frottements fluides et on suppose que la pulsation de l'onde  $\omega$  est très inférieure à  $\omega_0$ , montrez alors que cette permittivité relative se simplifie en :

$$\epsilon_r = 1 + \frac{\kappa e^2 n^*}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2}$$

Quelle est la relation entre la permittivité relative et l'indice  $n$ ? En remarquant que  $n^2 - 1 \ll 1$ , donnez l'expression de l'indice en fonction de  $n^*$ ,  $e$ ,  $m_e$ ,  $\epsilon_0$  et  $\omega_0$ .

□ 10 — Reliez le nombre volumique  $n^*$  à la pression et la température de l'air. Déduisez-en l'expression de l'indice en fonction de la pression, de la température et des autres constantes. Exprimez alors le coefficient  $a$  en fonction de  $e$ ,  $m_e$ ,  $\epsilon_0$ ,  $k_B$  et  $\omega_0$ . Calculez la valeur numérique de  $\omega_0$  et commentez le résultat obtenu.

### Constantes et valeurs numériques

- Constante de Boltzmann :  $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro :  $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante des gaz parfaits :  $R = k_B N_A = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Constante de Planck :  $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Constante de Planck réduite :  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Perméabilité du vide :  $\mu_0 = 1,3 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Charge élémentaire :  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Masse de l'électron :  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

$$k_B = \frac{R}{N_A}$$

### Théorème de Schwarz, ou de Young

Soit  $f(x,y)$  une fonction à valeurs réelles définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et au moins deux fois dérivable. Elle vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

### Identité entre opérateurs différentiels

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ , on a

$$\text{rot rot } \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \Delta \vec{u}$$