Feuille d'exercices n°52

Exercice 1 (**)

Soit $n \geqslant 2$. Établir les inégalités suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$

2. $\forall f \in \mathscr{C}^0([-1\,;1\,],\mathbb{R}) \qquad \displaystyle\left(\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$

3. $\forall (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;n\,]\!]^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \qquad \displaystyle\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}$

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, $x = (\sqrt{1}, \ldots, \sqrt{n})$ et $y = (1, \ldots, 1)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\langle x, 1\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \|x\|\|y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \times \sqrt{n} = n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

L'inégalité est une égalité si et seulement si (x, y) est liée ce qui n'est clairement pas le cas. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < n\sqrt{\frac{n+1}{2}}}$$

2. On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([-1\,;1\,],\mathbb{R})$ muni de

$$\forall (f, g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Comme f et g sont continues sur le segment $[-1\,;1\,]$, on a

$$\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge avec

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = [\mathrm{Arcsin}\ t]_{-1}^{1} = \pi$$

Ainsi,pour $(f, g) \in \mathrm{E}^2$, la quantité $\langle f, g\rangle$ est bien définie. L'application $(f, q) \mapsto \langle f, g\rangle$ est symétrique, linéaire en la première variable par linéarité de l'intégrale et du produit. Pour $f \in \mathrm{E}$, on a

$$\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale. Puis, par séparation de l'intégrale avec $t \mapsto \dfrac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ positive et continue sur $]-1\,;1\,[$, il vient

$$\langle f,f\rangle = 0 \iff \forall t \in \,]-1\,;1\,[\qquad \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \iff \forall t \in \,]-1\,;1\,[\qquad f(t) = 0$$

Par continuité de f en -1 et 1, il s'ensuit que $f = 0_{\mathrm{E}}$. Ainsi, l'application $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle$ est un produit scalaire sur E. Avec $g(t) = \sqrt{1-t^2}$ pour $t \in [\,-1\,;1\,]$, on obtient d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle f,g\rangle^2 = \left(\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \|f\|^2 \times \|g\|^2 = \int_{-1}^{1} \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \times \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Avec $t = \sin u$, il vient $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$

On conclut $\boxed{\forall f \in \mathscr{C}^0([\,-1\,;1\,],\mathbb{R}) \qquad \left(\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t}$

3. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. Avec $\mathrm{J} = \big(1\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathrm{A},\mathrm{J}\rangle| = \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant \|\mathrm{A}\| \times \|\mathrm{J}\| = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}} \times \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1^2}$$

On conclut $\boxed{\forall (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \qquad \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}}$

Exercice 2 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de $\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \sum_{k=0}^{2} \mathrm{P}(k)\mathrm{Q}(k)$ pour $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$.

1. Justifier $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Construire une base orthonormée de E.

Corrigé : 1. L'application $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle$ est clairement symétrique, linéaire en la première variable par linéarité de la somme et du produit. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. On a

$$\langle \mathrm{P},\mathrm{P}\rangle = \sum_{k=1}^{2} \underbrace{\mathrm{P}(k)^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \langle \mathrm{P},\mathrm{P}\rangle = 0 \iff \forall k \in [\![\,0\,;\,2\,]\!] \qquad \mathrm{P}(k) = 0$$

Comme $\deg \mathrm{P} \leqslant 2$, seul le polynôme nul admet plus de deux racines distinctes et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle \text{ est un produit scalaire sur E.}}$$

2. On utilise l'algorithme de Gram-Schmidt. On pose

$$\pi_0 = \frac{1}{\|1\|} \quad \text{et} \quad \|1\|^2 = \langle 1,1\rangle = 3 \quad \text{d'où} \quad \pi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Puis $\displaystyle \mathrm{P}_1 = \mathrm{X} - \langle \mathrm{X},\pi_0\rangle\pi_0 = \mathrm{X} - \frac{1}{3}\langle \mathrm{X},1\rangle = \mathrm{X} - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} k = \mathrm{X} - 1$

et $\displaystyle \|\mathrm{X}-1\|^2 = \sum_{k=0}^{2} (k-1)^2 = 2 \quad \text{d'où} \quad \pi_1 = \frac{\mathrm{X}-1}{\sqrt{2}}$

Puis $\mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^2 - \langle \mathrm{X}^2, \pi_0\rangle \pi_0 - \langle \mathrm{X}^2, \pi_1\rangle \pi_1$

$$= \mathrm{X}^2 - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} k^2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2} k^2(k-1)\right)(\mathrm{X}-1) = \mathrm{X}^2 - \frac{5}{3} - 2(\mathrm{X}-1) = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + \frac{1}{3}$$

et
$$\|\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + \frac{1}{3}\|^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

Ainsi, la base obtenue par orthonormalisation de la base canonique de E est

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\mathrm{X}-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + \frac{1}{3}\right)\right)}$$

Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$ pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$.
On pose $\mathrm{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Justifier que F est un sev de E et en préciser une base.
2. Pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, calculer $\mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathrm{F})$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{F}^\perp$.

Corrigé : 1. Notons $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a clairement $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ et on en déduit sans difficulté

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{U}, \mathrm{V}) \text{ est une base de F.}}$$

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Par caractérisation métrique du projeté orthogonal, on a

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathrm{F}) = \|\mathrm{M} - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{M})\|$$

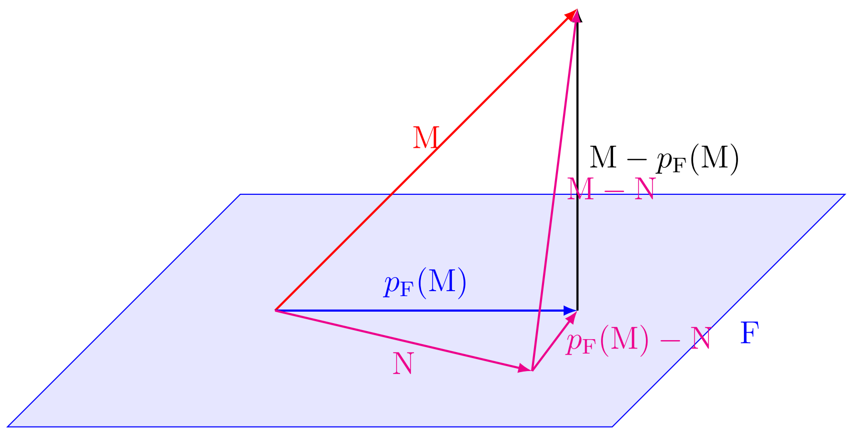

FIGURE 1 – Distance à un sous-espace de dimension finie

Puis $\mathrm{N} = p_{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) \iff \begin{cases} \mathrm{N} \in \mathrm{F} \\ \mathrm{M} - \mathrm{N} \in \mathrm{F}^\perp \end{cases} \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} \mathrm{N} = a\mathrm{U} + b\mathrm{V} \\ \langle \mathrm{M} - (a\mathrm{U} + b\mathrm{V}), \mathrm{U}\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{M} - (a\mathrm{U} + b\mathrm{V}), \mathrm{V}\rangle = 0 \end{cases}$

Pour $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{E}$, on a

$$\langle \mathrm{M}, \mathrm{U}\rangle = x+z \qquad \langle \mathrm{M}, \mathrm{V}\rangle = y+t \qquad \langle \mathrm{U}, \mathrm{U}\rangle = \langle \mathrm{V}, \mathrm{V}\rangle = 2 \qquad \langle \mathrm{U}, \mathrm{V}\rangle = 0$$

On résout le système

$$\begin{cases} a\langle \mathrm{U}, \mathrm{U}\rangle + b\langle \mathrm{V}, \mathrm{U}\rangle = \langle \mathrm{M}, \mathrm{U}\rangle \\ a\langle \mathrm{U}, \mathrm{V}\rangle + b\langle \mathrm{V}, \mathrm{V}\rangle = \langle \mathrm{M}, \mathrm{V}\rangle \end{cases} \iff \begin{cases} 2a = x+z \\ 2b = y+t \end{cases}$$

D'où $\qquad \mathrm{M} - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \dfrac{x+z}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \dfrac{y+t}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x-z & y-t \\ z-x & t-y \end{pmatrix}$

On trouve $\qquad \boxed{\forall \mathrm{M} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathrm{F}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2}}$

Remarque : Le système d'inconnues a et b peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{GA} = \mathrm{X} \quad \text{avec} \quad \mathrm{G} = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{U}, \mathrm{U}\rangle & \langle \mathrm{U}, \mathrm{V}\rangle \\ \langle \mathrm{U}, \mathrm{V}\rangle & \langle \mathrm{V}, \mathrm{V}\rangle \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{M}, \mathrm{U}\rangle \\ \langle \mathrm{M}, \mathrm{V}\rangle \end{pmatrix}$$

et on reconnaît la matrice de Gram G attendue pour la détermination d'un projeté orthogonal.

Variante : La famille $\left(\dfrac{\mathrm{U}}{\sqrt{2}}, \dfrac{\mathrm{V}}{\sqrt{2}}\right)$ est une base orthonormée de F ce qui permet de calculer directement $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{M})$.

3. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{E}$. On a

$$\mathrm{E} \in \mathrm{F}^{\perp} \iff \langle \mathrm{M}, \mathrm{U}\rangle = \langle \mathrm{M}, \mathrm{V}\rangle = 0 \iff \begin{cases} x+z = 0 \\ y+t = 0 \end{cases}$$

Il s'ensuit $\qquad \boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{F}^{\perp}.}$

Exercice 4 (**)

Soit E préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs normés de E telle que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2 = \|x\|^2$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E et que E est donc euclidien.

Corrigé : Notons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$. Pour $x \in \mathrm{F}^{\perp}$, on a $\|x\| = 0$ d'où $\mathrm{F}^{\perp} = \{0\}$ et par suite $\mathrm{F} = (\mathrm{F}^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathrm{E}$ ce qui prouve que $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice. Puis, pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k\rangle^2 = \|e_i\|^2 \iff \underbrace{\|e_i\|^4}_{=1} + \sum_{k \in [\![1\,;n]\!] \smallsetminus \{i\}} \langle e_i, e_k\rangle^2 = \underbrace{\|e_i\|^2}_{=1} \iff \sum_{k \in [\![1\,;n]\!] \smallsetminus \{i\}} \langle e_i, e_k\rangle^2 = 0$$

Il s'ensuit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée donc libre et on conclut

$$\boxed{\text{L'espace E est euclidien et } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base orthonormée de E.}}$$

Exercice 5 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ avec n entier non nul.

1. Soit $a \in \mathrm{E}$ normé. Déterminer la matrice dans la base canonique de $p_{\mathrm{Vect}\,(a)}$ et $p_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}$.
2. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ orthonormée et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de p_{F}.

Corrigé : 1. Soit $x \in \mathrm{E}$. Notons $\mathrm{P}_1 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} p_{\mathrm{Vect}\,(a)}$, $\mathrm{P}_2 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} p_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}$, $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} a$ et $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} x$. On a

$$p_{\mathrm{Vect}\,(a)}(x) = \langle x, a\rangle a$$

Matriciellement $\qquad \forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{P}_1\mathrm{X} = \langle \mathrm{X}, \mathrm{A}\rangle \mathrm{A} = \mathrm{A}(\mathrm{A}^\top \mathrm{X}) = \mathrm{A}\mathrm{A}^\top \mathrm{X}$

On trouve $\qquad \boxed{\mathrm{P}_1 = \mathrm{A}\mathrm{A}^\top \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_2 = \mathrm{I}_n - \mathrm{P}_1 = \mathrm{I}_n - \mathrm{A}\mathrm{A}^\top}$

2. On a $\qquad \forall x \in \mathrm{E} \qquad p_{\mathrm{F}}(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i\rangle\, u_i$

Matriciellement, on obtient $\qquad \boxed{\mathrm{P}_{\mathrm{F}} = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{U}_i {\mathrm{U}_i}^\top}$

Exercice 6 (**)

Soit E euclidien et F, G des sev de E.

1. Déterminer $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp$.
2. En déduire $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^\perp$.

Corrigé : 1. On a $\mathrm{F} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ et $\mathrm{G} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ d'où $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp \subset \mathrm{F}^\perp$ et $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp \subset \mathrm{G}^\perp$. Ainsi, on a $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp \subset \mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp$ et $(u, v) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$. On a

$$\langle x, u + v\rangle = \langle x, u\rangle + \langle x, v\rangle = 0$$

d'où l'inclusion $\mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp \subset (\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp = (\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp}$$

2. En appliquant le résultat antérieur à $\mathrm{F}^\perp$ et $\mathrm{G}^\perp$, il vient

$$\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = (\mathrm{F}^\perp + \mathrm{G}^\perp)^\perp$$

Passant à l'orthogonal, on obtient $\quad \boxed{(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^\perp = \mathrm{F}^\perp + \mathrm{G}^\perp}$

Exercice 7 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$ pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$.

1. Montrer $\qquad \mathrm{E} = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$
2. Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\operatorname*{Inf}_{\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$.
3. Pour $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$, calculer $\mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathrm{H})$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$.

Corrigé : 1. Considérons $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\top$. On a $\varphi^2 = \mathrm{id}$ et par propriété fondamentale de la trace

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad \|\varphi(\mathrm{A})\|^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}\mathrm{A}^\top) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|^2$$

L'application φ est donc une symétrie et une isométrie d'où une symétrie orthogonale avec $\mathrm{E}_1(\varphi) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{E}_{-1}(\varphi) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et par suite

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$$

2. La borne inférieure est bien définie comme borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}_+$. Puis, par continuité et croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$, il vient

$$\operatorname*{Inf}_{\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 = \operatorname*{Inf}_{\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \|\mathrm{A} - \mathrm{M}\|^2 = \left(\operatorname*{Inf}_{\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \|\mathrm{A} - \mathrm{M}\| \right)^2 = \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^2$$

Par théorème de distance à un sev de dimension finie, on a

$$\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \|\mathrm{A} - p_{\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}(\mathrm{A})\|$$

et comme l'espace E est euclidien, il est licite d'écrire $\mathrm{id} - p_{\mathscr{S}_n(\mathbb{R})} = p_{\mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$ d'où

$$\boxed{\operatorname*{Inf}_{\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 = \|\frac{\mathrm{A} - \mathrm{A}^\top}{2}\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2}$$

3. On a
$$\mathrm{M} \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} \iff \langle \mathrm{I}_n, \mathrm{M} \rangle = 0 \iff \mathrm{M} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)^\perp$$

Ainsi
$$\boxed{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathrm{H}) = \frac{|\langle \mathrm{M}, \mathrm{I}_n \rangle|}{\|\mathrm{I}_n\|} = \frac{|\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})|}{\sqrt{n}}}$$

Exercice 8 (*)

Soit E préhilbertien réel et $(u, a) \in \mathrm{E}^2$. Déterminer de deux manières différentes

$$\operatorname*{Inf}_{t \in \mathbb{R}} \|u - ta\|^2$$

Corrigé : Si $a = 0_{\mathrm{E}}$, la fonction $t \mapsto \|u - ta\|^2$ est constante égale à $\|u\|^2$. On suppose $a \neq 0_{\mathrm{E}}$. On pose $\mathrm{P}(t) = \|u - ta\|^2$ pour t réel et on a

$$\mathrm{P}(t) = \|u\|^2 - 2t \langle u, a \rangle + t^2 \|a\|^2$$

C'est une fonction trinôme donc dérivable et qui atteint son minimum là où sa dérivée s'annule avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}'(t) = 2t\|a\|^2 - 2t \langle u, a \rangle$$

Ainsi
$$\boxed{\operatorname*{Inf}_{t \in \mathbb{R}} \|u - ta\|^2 = \mathrm{P}\left(\frac{\langle u, a \rangle}{\|a\|^2} \right) = \frac{1}{\|a\|^2} \left(\|u\|^2 \|a\|^2 - \langle u, a \rangle^2 \right)}$$

Variante : On peut aussi observer, comme $s \mapsto s^2$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$\operatorname*{Inf}_{t \in \mathbb{R}} \|u - ta\|^2 = \operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{Vect}\,(a)} \|u - x\|^2 = \left(\operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{Vect}\,(a)} \|u - x\| \right)^2 = \mathrm{d}(u, \mathrm{Vect}\,(a))^2$$

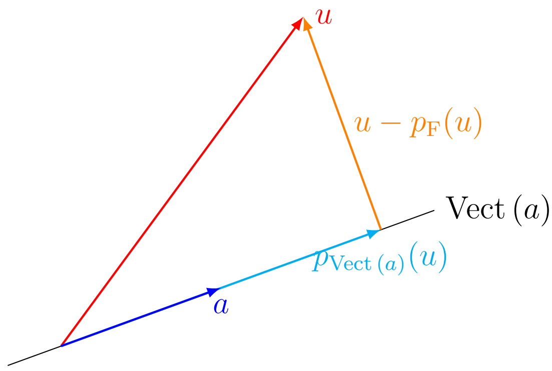

Figure 2 – Projection sur l'axe Vect (a)

La famille $(a/\|a\|)$ est une base orthonormée de Vect (a) d'où $p_{\mathrm{Vect}\,(a)}(u) = \langle u, a\rangle \dfrac{a}{\|a\|^2}$ et par caractérisation métrique du projeté orthogonal sur Vect (a) de dimension finie, on retrouve

$$\mathrm{d}(u, \mathrm{Vect}\,(a))^2 = \|u - p_{\mathrm{Vect}\,(a)}(u)\|^2 = \big\langle u - p_{\mathrm{Vect}\,(a)}(u), u\big\rangle = \|u\|^2 - \frac{\langle u, a\rangle^2}{\|a\|^2}$$

Exercice 9 (**)

Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(1 + at + bt^2\right)^2 \,\mathrm{d}t$.

Corrigé : Notons
$$\Lambda = \left\{ \int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 \,\mathrm{d}t, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

C'est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée donc elle admet une borne inférieure finie. On pose $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$ et on note $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$. En utilisant notamment la croissance et continuité de $u \mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\operatorname{Inf} \Lambda = \operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|1 + a\mathrm{X} + b\mathrm{X}^2\|^2 = \left(\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|1 - (-a\mathrm{X} - b\mathrm{X}^2)\| \right)^2 = \mathrm{d}(1, \mathrm{F})^2$$

Comme le sev F est de dimension finie, on a par caractérisation métrique du projeté orthogonal

$$\mathrm{d}(1, \mathrm{F}) = \|1 - p_{\mathrm{F}}(1)\|$$

Par caractérisation géométrique du projeté orthogonal, il vient pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$

$$\mathrm{P} = p_{\mathrm{F}}(1) \iff \begin{cases} \mathrm{P} \in \mathrm{F} \\ 1 - \mathrm{P} \in \mathrm{F}^{\perp} \end{cases} \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \begin{cases} \mathrm{P} = \alpha\mathrm{X} + \beta\mathrm{X}^2 \\ \langle 1 - \mathrm{P}, \mathrm{X}\rangle = 0 \\ \langle 1 - \mathrm{P}, \mathrm{X}^2\rangle = 0 \end{cases}$$

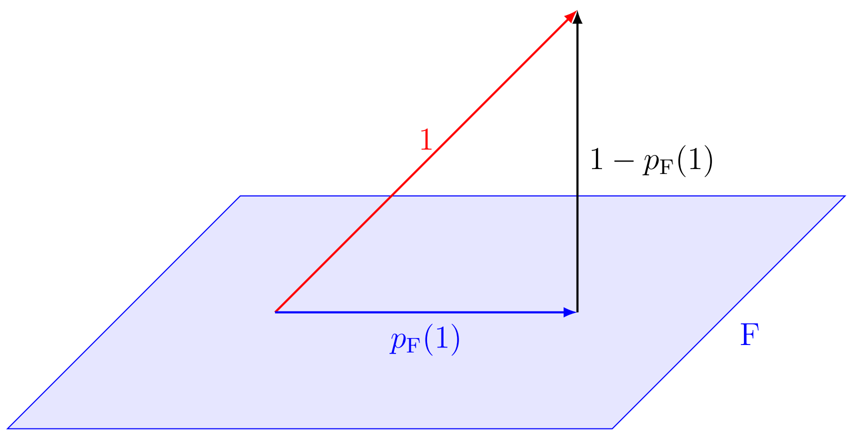

FIGURE 3 – Distance à un sev de dimension finie

Ainsi, les scalaires α, β sont solutions de

$$\begin{cases} \langle X, X\rangle\alpha + \langle X^2, X\rangle\beta = \langle 1, X\rangle \\ \langle X, X^2\rangle\alpha + \langle X^2, X^2\rangle\beta = \langle 1, X^2\rangle \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\alpha}{4} + \dfrac{\beta}{5} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \iff (\alpha, \beta) = \left(4, -\frac{10}{3}\right)$$

Enfin $$\|1 - p_F(1)\|^2 = \langle 1 - p_F(1), 1\rangle = \int_0^1 \left(1 - 4t + \frac{10}{3}t^2\right) \, dt$$

On conclut $$\boxed{\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 \, dt = \frac{1}{9}}$$

Exercice 10 (**)

Soit E euclidien avec $\dim E = n \geqslant 2$ et (u, v) une famille libre de vecteurs de E. On pose

$$\forall x \in E \qquad f(x) = \langle u, x\rangle v + \langle v, x\rangle u$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f possède $n - 2$ colonnes nulles.
3. En déduire les valeurs propres de f.
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Corrigé : 1. L'application f est à valeurs dans E et linéaire par linéarité du produit scalaire en la deuxième variable et linéarité du produit. Ainsi

$$\boxed{f \in \mathscr{L}(E)}$$

2. On a $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ avec $F = \operatorname{Vect}(u, v)$. Soit $(e_3, \ldots, e_n)$ une base de $F^\perp$. Ainsi, la famille $\mathscr{B} = (u, v, e_3, \ldots, e_n)$ est une base de E et on a

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} f = \operatorname{diag}\left[\begin{pmatrix} \langle u, v\rangle & \|v\|^2 \\ \|u\|^2 & \langle u, v\rangle \end{pmatrix}, 0\right]}$$

3. On a $$\begin{aligned} \chi_f(X) &= X^{n-2}\left[(X - \langle u, v\rangle)^2 - (\|u\|\|v\|)^2\right] \\ &= X^{n-2}\left(X - \langle u, v\rangle - \|u\|\|v\|\right)\left(X - \langle u, v\rangle + \|u\|\|v\|\right) \end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{Sp}\,(f) = \{0, \langle u, v\rangle + \|u\|\|v\|, \langle u, v\rangle - \|u\|\|v\|\}}$$

4. Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'étant pas réalisé, on a

$$\langle u, v\rangle \neq \pm \|u\|\|v\|$$

d'où Card Sp $(f) = 3$. Par suite

$$\dim \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(f)} \mathrm{E}_\lambda(f) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(f)} \dim \mathrm{E}_\lambda(f) \geqslant n - 2 + 1 + 1 = \dim \mathrm{E}$$

d'où $$\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(f)} \mathrm{E}_\lambda(f)$$

Ainsi $$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable.}}$$

Variante : Soit $\mathscr{L}$ une base orthonormée de E. Notons $\mathrm{U} = \mathrm{mat}_{\mathscr{L}}u$, $\mathrm{V} = \mathrm{mat}_{\mathscr{L}}v$ et $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathscr{L}}x$ pour $x \in \mathrm{E}$. Par associativité, on trouve

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{L}}f(x) = (\mathrm{U}^\top\mathrm{X})\mathrm{V} + (\mathrm{V}^\top\mathrm{X})\mathrm{U} = (\mathrm{V}\mathrm{U}^\top + \mathrm{U}\mathrm{V}^\top)\mathrm{X}$$

d'où $$\mathrm{mat}_{\mathscr{L}}f = \mathrm{V}\mathrm{U}^\top + \mathrm{U}\mathrm{V}^\top \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

D'après le théorème spectral, il en résulte que f est diagonalisable.

Exercice 11 (**)

Soit E préhilbertien réel et F sev de E. Montrer que $\mathrm{F}^\perp = \bar{\mathrm{F}}^\perp$.

Corrigé : On a $\mathrm{F} \subset \bar{\mathrm{F}}$ d'où $\bar{\mathrm{F}}^\perp \subset \mathrm{F}^\perp$. Considérons $x \in \mathrm{F}^\perp$ et $y \in \bar{\mathrm{F}}$. Par caractérisation séquentielle, il existe $(y_n)_n \in \mathrm{F}^\mathbb{N}$ telle que $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. L'application $u \mapsto \langle x, u\rangle$ est continue car linéaire et $\|x\|$-lipschitzienne d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi, on a

$$\langle x, y_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, y\rangle \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \langle x, y_n\rangle = 0$$

d'où $$\forall (x, y) \in \mathrm{F}^\perp \times \bar{\mathrm{F}} \qquad \langle x, y\rangle = 0$$

ce qui prouve $\mathrm{F}^\perp \subset \bar{\mathrm{F}}^\perp$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{F}^\perp = \bar{\mathrm{F}}^\perp}$$

Exercice 12 (**)

Soit E préhilbertien et p, q des projecteurs orthogonaux. Montrer

$$p \circ q = 0 \iff q \circ p = 0$$

Corrigé : Comme p et q sont projecteurs orthogonaux, on a

$$\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ p \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\ p \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \mathrm{Im}\ q \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\ q$$

Puis $$p \circ q = 0 \iff \mathrm{Im}\ q \subset \mathrm{Ker}\ p \implies \mathrm{Ker}\ p^\perp \subset \mathrm{Im}\ q^\perp$$

D'où $$p \circ q = 0 \implies \mathrm{Im}\ p \subset \mathrm{Ker}\ q \implies q \circ p = 0$$

L'autre sens vient par symétrie des rôles et on conclut

$$\boxed{p \circ q = 0 \iff q \circ p = 0}$$

Variante : On a $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$ pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ et de même pour q. Supposons $p \circ q = 0$. Pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, on a

$$\langle p \circ q(x), y\rangle = \langle p \circ q(x), p(y)\rangle = \langle q(x), p(y)\rangle = \langle q(x), q \circ p(y)\rangle = 0_{\mathrm{E}}$$

En particulier, en choisissant $x = p(y)$ pour $y \in \mathrm{E}$, on trouve $\|q \circ p(y)\|^2 = 0$ d'où $q \circ p = 0$ et on complète par symétrie des rôles.