ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°53

Exercice 1 (**)

Soit E préhilbertien, F un sev de E de dimension finie et $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_p)$ une base de F. Soit $x \in \mathrm{E}$ et $y = p_{\mathrm{F}}(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i u_i$ avec les a_i réels. On pose

$$\mathrm{G} = \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p} \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \qquad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \langle x, u_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x, u_p\rangle \end{pmatrix}$$

Établir $$\mathrm{G} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \mathrm{G}^{-1}\mathrm{X}$$

Corrigé : Soit $y = \sum_{i=1}^{p} a_i u_i$ avec les a_i réels. On a

$$y = p_{\mathrm{F}}(x) \iff x - y \in \mathrm{F}^{\perp} \iff \forall i \in [\![1\,;p]\!] \qquad \langle x-y, u_i\rangle = 0 \iff \mathrm{GA} = \mathrm{X}$$

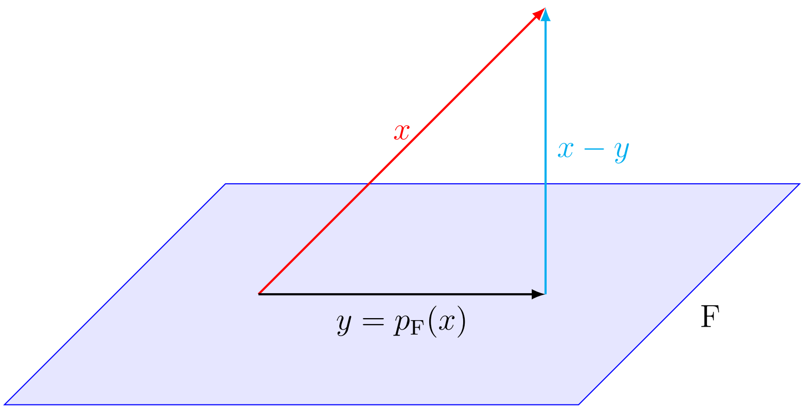

FIGURE 1 – Décomposition d'une projection orthogonale

L'existence et l'unicité de $y \in \mathrm{F}$ vérifiant $x - y \in \mathrm{F}^{\perp}$ équivaut à l'existence et l'unicité de la matrice colonne A qui équivaut à l'inversibilité de G. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{G} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \mathrm{G}^{-1}\mathrm{X}}$$

Exercice 2 (**)

Soit E préhilbertien réel, n entier non nul, une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ et une matrice $\mathrm{G} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{G} = \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ avec $p \leqslant n$ telle que $\mathrm{G} = \mathrm{A}^{\top}\mathrm{A}$.
2. Justifier l'égalité $\qquad \forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{rg}\,\big(\mathrm{M}^{\top}\mathrm{M}\big) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{M})$
3. En déduire une relation entre $\mathrm{rg}\,(\mathrm{G})$ et $\mathrm{rg}\,(u_1, \ldots, u_n)$.

Corrigé : 1. Si les u_i sont tous nuls, le résultat est trivial. Notons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$. L'espace F est euclidien et admet une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ avec $p \leqslant n$. Par suite

$$\forall (i,j) \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]^2 \qquad \langle u_i, u_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{p} \langle u_i, e_k\rangle e_k, \sum_{\ell=1}^{p} \langle u_j, e_\ell\rangle e_\ell\rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle u_i, e_k\rangle \langle u_j, e_k\rangle$$

Ainsi, notant $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \big(\langle u_j, e_i\rangle\big)_{(i,j)\in[\![\, 1\,;\, p\,]\!]\times[\![\, 1\,;\, n\,]\!]}$, on conclut

$$\boxed{\mathrm{G} = \mathrm{A}^\top \mathrm{A}}$$

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On clairement $\mathrm{Ker}\ \mathrm{M} \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\mathrm{X} = 0$. En multipliant à gauche par $\mathrm{X}^\top$, on obtient

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\mathrm{X} = \langle \mathrm{MX}, \mathrm{MX}\rangle = 0$$

d'où $\mathrm{MX} = 0$ et l'inclusion $\mathrm{Ker}\ \mathrm{M}^\top\mathrm{M} \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{M}$. Le théorème du rang appliqué M et $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ donne alors

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{M} + \mathrm{rg}\,(\mathrm{M}) \qquad \dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{M}^\top\mathrm{M} + \mathrm{rg}\,\big(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\big)$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{rg}\,(\mathrm{M}) = \mathrm{rg}\,\big(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\big)}$$

3. D'après les résultats précédemment établis, on conclut

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(\mathrm{G}) = \mathrm{rg}\,\big(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}\big) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(u_1, \ldots, u_n)}$$

Exercice 3 (***)

Soit E euclidien, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

1. Montrer que $\quad \mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$ pour $x \in \mathrm{E}$.

Corrigé : 1. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)^\perp$ avec x non nul. En particulier, on a

$$\langle x, (f - \mathrm{id}\,)(x)\rangle = 0 \iff \langle x, f(x)\rangle = \|x\|^2$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et avec l'hypothèse faite sur f, il vient

$$\langle x, f(x)\rangle \leqslant |\langle x, f(x)\rangle| \leqslant \|x\| \times \|f(x)\| \leqslant \|x\|^2$$

D'après l'égalité précédemment établie, on en déduit que toutes les inégalités ci-dessus sont des égalités et donc, d'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, la famille $(x, f(x))$ est liée. Comme $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, on a $f(x) = \alpha x$ avec α réel. Puis

$$\langle x, f(x)\rangle = \alpha\|x\|^2 = \|x\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 1$$

Ainsi
$$x \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)^\perp \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,)$$

Autrement dit
$$\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)^\perp \subset \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,)$$

D'après le théorème du rang, on a l'égalité des dimensions d'où l'égalité $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)^\perp = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,)$. Comme les sev $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)$ et $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux, on conclut

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)}$$

Variante : Une approche plus terre à terre : soit $a \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,)$ et $b \in \mathrm{E}$. On a

$$\|f(a+b)\|^2 \leqslant \|a+b\|^2 \iff 2\langle a, f(b)-b\rangle \leqslant \|b\|^2 - \|f(b)\|^2$$

En remplaçant a par ta avec t réel, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad 2t\langle a, f(b)-b\rangle \leqslant \|b\|^2 - \|f(b)\|^2$$

Cette inégalité est vraie pour tout t réel si et seulement si $\langle a, f(b)-b\rangle = 0$ (sinon, fonction affine majorée). Ceci prouve $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}\,) \perp \mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id}\,)$.

2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe un unique couple $(a,b) \in \mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id}\,) \times \mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}\,)$ tel que $x = a+b$. Une récurrence immédiate donne $f^k(a) = a$ pour tout k entier. Puis, il existe $c \in \mathrm{E}$ tel que $b = (f-\mathrm{id}\,)(c)$ et il vient par téléscopage pour n entier

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f^{k+1}(c) - f^k(c)\right] = \frac{f^n(c)-c}{n}$$

L'application f^n est 1-lipschitzienne et on obtient

$$\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(b)\| \leqslant \frac{2\|c\|}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) = a + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

On conclut

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k \xrightarrow[n\to\infty]{} p_{\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id}\,)}}$$

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique, $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang égal à p et $\mathrm{B} \in \mathrm{E}$. Montrer qu'il existe un unique $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ rendant minimum $\|\mathrm{AX}-\mathrm{B}\|^2$ et préciser ce X_0.

Corrigé : On ne sait pas *a priori* qu'il s'agit d'un minimum. Considérons $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \|\mathrm{AX}-\mathrm{B}\|^2$.
On a $\{\mathrm{AX}, \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})\} = \mathrm{Im}\ \mathrm{A}$ d'où, par continuité et croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\operatorname*{Inf}_{\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|\mathrm{AX}-\mathrm{B}\|^2 = \left(\operatorname*{Inf}_{\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|\mathrm{AX}-\mathrm{B}\|\right)^2 = \left(\operatorname*{Inf}_{\mathrm{C}\in\mathrm{Im}\ \mathrm{A}} \|\mathrm{B}-\mathrm{C}\|\right)^2 = \mathrm{d}(\mathrm{B}, \mathrm{Im}\ \mathrm{A})^2$$

Le sev Im A est de dimension finie et par caractérisation métrique du projeté orthogonal, on a

$$\mathrm{d}(\mathrm{B}, \mathrm{Im}\ \mathrm{A}) = \|\mathrm{B} - p_{\mathrm{Im}\ \mathrm{A}}(\mathrm{B})\|$$

Comme $p_{\mathrm{Im}\ \mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{Im}\ \mathrm{A}$, il existe donc $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $p_{\mathrm{Im}\ \mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathrm{AX}_0$ ce qui prouve que la borne inférieure cherchée est effectivement un minimum. L'élément X_0 solution de l'équation $p_{\mathrm{Im}\ \mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathrm{AX}$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est unique par injectivité de A puisque d'après le théorème du rang

$$\dim \mathbb{R}^p = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} + \mathrm{rg}\ \mathrm{A} \iff p = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} + p \iff \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} = 0$$

D'après la caractérisation géométrique du projeté orthogonal, on a

$$\forall \mathrm{C} \in \mathrm{Im}\ \mathrm{A} \qquad \langle \mathrm{C}, \mathrm{B} - p_{\mathrm{Im}\ \mathrm{A}}(\mathrm{B})\rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \qquad \langle \mathrm{AX}, \mathrm{B} - \mathrm{AX}_0\rangle = 0$$

Autrement dit, pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on trouve $(\mathrm{AX})^\top(\mathrm{B}-\mathrm{AX}_0) = 0$ ce qui s'interprète, en munissant $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \qquad \langle \mathrm{X}, \mathrm{A}^\top\mathrm{B} - \mathrm{A}^\top\mathrm{AX}_0\rangle_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})} = 0$$

La matrice colonne $\mathrm{A}^\top\mathrm{B} - \mathrm{A}^\top\mathrm{AX}_0$ est orthogonale à toute matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ donc à elle-même en particulier ce qui prouve que sa norme est nulle et qu'elle est donc nulle. On en déduit

$$\mathrm{A}^\top\mathrm{AX}_0 = \mathrm{A}^\top\mathrm{B}$$

Enfin, on sait que $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} = \mathrm{rg}\ \mathrm{A}^\top\mathrm{A} = p$ et comme $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, cela signifie que $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{X}_0 = (\mathrm{A}^\top\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\top\mathrm{B} \quad \text{et} \quad \underset{\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\mathrm{Min}} \|\mathrm{AX}-\mathrm{B}\|^2 = \|\mathrm{A}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\top\mathrm{B}-\mathrm{B}\|^2}$$

Remarque : On a $p_{\mathrm{Im\ A}}(\mathrm{B}) = \mathrm{AX}_0 = \mathrm{A}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\top\mathrm{B}$ ce qui prouve que $\mathrm{A}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\top$ est la matrice de la projection orthogonale $p_{\mathrm{Im\ A}}$ dans la base canonique de E.

Exercice 5 (***)

Soit E préhilbertien réel et $(e_n)_n$ une famille orthonormale de E. Montrer l'équivalence :

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\langle e_n, x\rangle^2 \iff x \in \overline{\mathrm{Vect}\,(e_n)_n}$$

Corrigé : Soit $x \in \mathrm{E}$. D'après l'inégalité de Bessel, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n}\langle e_k, x\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$$

d'où la convergence de la série $\sum \langle e_n, x\rangle^2$. Notons $\mathrm{F}_n = \mathrm{Vect}\,(e_0,\ldots,e_n)$ et p_n le projecteur orthogonal sur F_n. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|x\|^2 = \|p_n(x)\|^2 + \|x-p_n(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n}\langle e_k, x\rangle^2 + \|x-p_n(x)\|^2$$

Ainsi
$$\begin{aligned}\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\langle e_n, x\rangle^2 &\iff \|x-p_n(x)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\langle e_n, x\rangle^2 \\ &\iff \|x-p_n(x)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff p_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x\end{aligned}$$

Soit $x \in \overline{\mathrm{Vect}\,(e_n)_n}$ et soit $\varepsilon > 0$. On a $\mathrm{B}(x,\varepsilon)\cap\mathrm{Vect}\,(e_n)_n \neq \varnothing$. Soit y un élément de cette intersection. On dispose de N entier tel que $y \in \mathrm{F}_\mathrm{N}$. Par propriété du projeté orthogonal, il vient

$$\|x - p_\mathrm{N}(x)\| \leqslant \|x-y\| < \varepsilon$$

Par ailleurs, la suite $(\mathrm{F}_n)_n$ croît et il en résulte que la suite des bornes inférieures de $\{\|x-u\|, u \in \mathrm{F}_n\}_n$ décroît, *i.e.* la suite $(\|x-p_n(x)\|)_n$. Ainsi

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \|x-p_n(x)\| \leqslant \|x-p_\mathrm{N}(x)\| < \varepsilon$$

On donc établi
$$p_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

Réciproquement, si $p_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, comme $p_n(x) \in \mathrm{Vect}\,(e_k)_k$ pour tout n entier, on en déduit par caractérisation séquentielle des points adhérents que $x \in \overline{\mathrm{Vect}\,(e_n)_n}$. On conclut

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\langle e_n, x\rangle^2 \iff x \in \overline{\mathrm{Vect}\,(e_n)_n}}$$

Exercice 6 (***)

On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right] \quad$ et $\quad \mathrm{U}_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\mathrm{P}_n$

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([-1\,;1\,],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(f,g) \in \mathrm{E}^2$.

1. Pour n entier, déterminer le degré et coefficient dominant de P_n puis calculer $\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{X}^k\rangle$ avec $k \in [\![\, 0\,;\, n\,]\!]$.
2. En déduire que $(\mathrm{U}_n)_n$ est une famille orthonormale de E et que $\overline{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}_n)_n} = \mathrm{E}$.

Corrigé : 1. Soit n entier. Notons $\mathrm{L}_n = (\mathrm{X}^2-1)^n$. On a

$$\mathrm{L}_n = \mathrm{X}^{2n} + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \deg \mathrm{Q}_n < 2n \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}_n = \frac{1}{2^n n!}\left[\frac{(2n)!}{n!}\mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n^{(n)}\right]$$

D'où
$$\boxed{\mathrm{P}_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}\mathrm{X}^n + \mathrm{R}_n \quad \text{avec} \quad \deg \mathrm{R}_n < n}$$

2. Soit n entier et $k \in [\![\, 0\,;\, n\,]\!]$. On a

$$\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{X}^k\rangle = \frac{1}{2^n n!}\langle \mathrm{L}_n^{(n)}, \mathrm{X}^k\rangle = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \mathrm{L}_n^{(n)}(t)t^k\,\mathrm{d}t$$

En intégrant par parties, il vient

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{L}_n^{(n)}(t)t^k\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{L}_n^{(n-1)}(t)t^k\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \mathrm{L}_n^{(n-1)}(t)(t^k)'\,\mathrm{d}t$$

Or, les réels 1 et -1 sont racines d'ordre n de L_n donc $\mathrm{L}_n^{(j)}(\pm 1) = 0$ pour $j \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!]$. Par suite, le crochet s'annule et on a

$$\langle \mathrm{L}_n^{(n)}, \mathrm{X}^k\rangle = -\langle \mathrm{L}_n^{(n-1)}, (\mathrm{X}^k)'\rangle$$

Supposons $k \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!]$. En itérant $k+1$ intégrations par parties, on obtient

$$\langle \mathrm{L}_n^{(n)}, \mathrm{X}^k\rangle = (-1)^{k+1}\langle \mathrm{L}_n^{(n-(k+1))}, (\mathrm{X}^k)^{(k+1)}\rangle = (-1)^{k+1}\langle \mathrm{L}_n^{(n-(k+1))}, 0\rangle = 0$$

Pour $k = n$, avec n intégrations par parties, il vient

$$\langle \mathrm{L}_n^{(n)}, \mathrm{X}^n\rangle = (-1)^n\langle \mathrm{L}_n^{(0)}, (\mathrm{X}^n)^{(n)}\rangle = (-1)^n n!\int_{-1}^{1}(t^2-1)^n\,\mathrm{d}t$$

Posons $\mathrm{I}_{m,n} = \displaystyle\int_{-1}^{1}(t+1)^m(t-1)^n\,\mathrm{d}t$ pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. En intégrant par parties, on trouve

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_{m,n} = -\frac{n}{m+1}\mathrm{I}_{m+1,n-1}$$

puis
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned}\mathrm{I}_{n,n} &= (-1)^n\frac{n!}{(n+1)\ldots(2n)}\mathrm{I}_{2n,0}\\ &= (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\times\int_{-1}^{1}(t+1)^{2n}\,\mathrm{d}t = (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\times\frac{2^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

Ainsi
$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier} \quad \langle \mathrm{P}_n, \mathrm{X}^k\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!] \\ \dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}}\times\dfrac{2}{2n+1} & \text{si } k = n\end{cases}}$$

3. Notons $\mathrm{U}_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\mathrm{P}_n$ pour n entier. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \neq n$. On peut supposer $m < n$ sans perte de généralité. D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\forall k < n \qquad \langle \mathrm{P}_n, \mathrm{X}^k \rangle = 0 \iff \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^{\perp}$$

Comme $\mathrm{P}_m \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, il en résulte que $\mathrm{P}_n \perp \mathrm{P}_m$ pour $m < n$. Puis

$$\|\mathrm{U}_n\|^2 = \frac{2n+1}{2}\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{P}_n \rangle = \frac{2n+1}{2}\left(\frac{\binom{2n}{n}}{2^n}\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{X}^n \rangle + \langle \mathrm{P}_n, \mathrm{R}_n \rangle\right) = 1$$

Comme $\deg \mathrm{U}_n = n$ pour tout n entier, on a $\mathbb{R}[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}_n)_n$. Soit $f \in \mathrm{E}$. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass, pour $\varepsilon > 0$, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}_n)_n$ tel que $\|f - \mathrm{P}\|_{\infty,[-1;1]} \leqslant \varepsilon$ d'où

$$\|f - \mathrm{P}\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} [f(t) - \mathrm{P}(t)]^2 \,\mathrm{d}t} \leqslant \varepsilon\sqrt{2}$$

Ainsi $\boxed{\text{La famille } (\mathrm{U}_n)_n \text{ est une famille orthonormale de E et } \overline{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}_n)_n} = \mathrm{E}.}$

Exercice 7 (***)

Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, paires et 2π-périodiques. On pose :

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose $\qquad c_0 : t \mapsto 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1 \qquad c_n : t \mapsto \sqrt{2}\cos(nt)$

1. Vérifier que $(f,g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad | \quad \|f - \mathrm{P} \circ \cos\|_{\infty,[0;\pi]} \leqslant \varepsilon$$

3. Montrer que $(c_n)_n$ est une famille orthonormale de E et que $\overline{\mathrm{Vect}\,(c_n)_n} = \mathrm{E}$.

Corrigé : 1. Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. L'intégrale définissant $\langle f, g \rangle$ existe comme intégrale de fonction continue sur un segment. L'application $(f,g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est symétrique, linéaire en la première variable par linéarité de l'intégrale et du produit, positive par positivité de l'intégrale. Soit $f \in \mathrm{E}$ telle que $\langle f, f \rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0$. L'application f^2 est continue positive d'où, par séparation de l'intégrale

$$\forall t \in [0;\pi] \qquad f(t) = 0$$

Par parité $\qquad \forall t \in [-\pi;0] \qquad f(t) = f(-t) = 0$

Enfin, par 2π-périodicité,

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = f(\underbrace{t - 2n\pi}_{\in[-\pi;\pi[}) = 0 \quad \text{avec} \quad n = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\pi} + 1\right) \right\rfloor$$

$$\boxed{\text{L'application } (f,g) \mapsto \langle f, g \rangle \text{ est un produit scalaire sur E.}}$$

2. On a $f \circ \mathrm{Arccos} \in \mathscr{C}^0([-1;1],\mathbb{R})$. D'après le théorème de Weierstrass, il vient

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad | \quad \|f \circ \mathrm{Arccos} - \mathrm{P}\|_{\infty,[-1;1]} \leqslant \varepsilon$$

Sans difficulté, on a $\mathrm{P}\circ\cos\in\mathrm{E}$ pour tout $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et comme Arccos réalise une bijection de $[-1\,;1]$ sur $[0\,;\pi]$, on conclut

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\qquad\exists\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]\quad|\quad\|f-\mathrm{P}\circ\cos\|_{\infty,[0\,;\pi]}\leqslant\varepsilon}$$

3. D'après ce qui précède, on a

$$\forall\varepsilon>0\qquad\exists\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]\quad|\quad\|f-\mathrm{P}\circ\cos\|=\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[f(t)-\mathrm{P}\circ\cos(t)]^2\,\mathrm{d}t}\leqslant\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\varepsilon^2\,\mathrm{d}t}=\varepsilon$$

or $$\{\mathrm{P}\circ\cos,\ \mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]\}=\mathrm{Vect}\,(\cos^n)_n$$

ce qui prouve donc $\overline{\mathrm{Vect}\,(\cos^n)_n}=\mathrm{E}$. Montrons l'inclusion $\mathrm{Vect}\,(\cos^n)_n\subset\mathrm{Vect}\,(c_n)_n$. Soit n entier et t réel. D'après l'identité d'Euler, il vient

$$\cos^n t=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)t}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)t}$$

Comme il s'agit d'un réel, il vient en considérant la partie réelle du membre de droite et la parité de cos

$$\cos^n t=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\cos(|2k-n|\,t)$$

Par suite $\quad\mathrm{Vect}\,(\cos^n)_n\subset\mathrm{Vect}\,(c_n)_n\quad\Longrightarrow\quad\mathrm{E}=\overline{\mathrm{Vect}\,(\cos^n)_n}\subset\overline{\mathrm{Vect}\,(c_n)_n}\subset\mathrm{E}$

Enfin, on trouve

$$\langle c_0,c_0\rangle=1\qquad\langle\forall n\geqslant1\qquad\langle c_0,c_n\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{2}\cos(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{n\pi}\,[\sin(nt)]_0^\pi=0$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad\langle c_n,c_n\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\cos^2(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(1+\cos(2nt))\,\mathrm{d}t=1$$

et pour m,n des entiers non nuls et distincts

$$\begin{aligned}\langle c_n,c_m\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\cos(nt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos((n-m)t)+\cos((n+m)t)]\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((n-m)t)}{n-m}+\frac{\sin((n+m)t)}{n+m}\right]_0^\pi=0\end{aligned}$$

les dénominateurs étant bien non nuls puisque $m\neq n$ et $m+n>0$. On conclut donc

$$\boxed{\text{La famille }(c_n)_n\text{ est une famille orthonormale de E et }\overline{\mathrm{Vect}\,(c_n)_n}=\mathrm{E}.}$$

Exercice 8 (****)

Soit E euclidien et C un convexe fermé non vide de E.

1. Soient x, a et b dans E tels que $a\neq b$ et $\|x-a\|=\|x-b\|$. Montrer

$$\|x-\frac{a+b}{2}\|<\|x-a\|$$

2. Montrer que pour $x\in\mathrm{E}$, il existe un unique vecteur $a\in\mathrm{C}$ tel que

$$\|x-a\|=\operatorname*{Inf}_{y\in\mathrm{C}}\|x-y\|$$

On définit l'application $p:x\mapsto a$ *projection sur le convexe* C.

3. Soit $x \in \mathrm{E}$ et $a \in \mathrm{C}$ tel que $\langle x-a, y-a\rangle \leqslant 0$ pour tout $y \in \mathrm{C}$. Montrer que $a = p(x)$.
4. On suppose qu'il existe $y \in \mathrm{C}$ tel que
$$\langle x - p(x), y - p(x)\rangle > 0$$
En considérant $ty + (1-t)p(x)$ avec $t \in [\,0\,;1\,]$, obtenir une contradiction.
5. Montrer $\qquad \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle x-y, p(x)-p(y)\rangle \geqslant \|p(x)-p(y)\|^2$

   En déduire que p est une application continue.

Corrigé : 1. D'après l'inégalité triangulaire, on a
$$\|x - \frac{a+b}{2}\| = \frac{1}{2}\|x-a+x-b\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\|x-a\| + \|x-b\|\right) = \|x-a\|$$
Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si $(x-a, x-b)$ est positivement liée, c'est-à-dire $x - b = \lambda(x-a)$ avec $\lambda \geqslant 0$ ($x-a$ non nul sinon $x = a$ et $\|a-b\| = 0$ absurde). L'égalité en norme impose $\lambda = 1$ d'où $a = b$ ce qui est faux. Ainsi
$$\boxed{\|x - \frac{a+b}{2}\| < \|x-a\|}$$

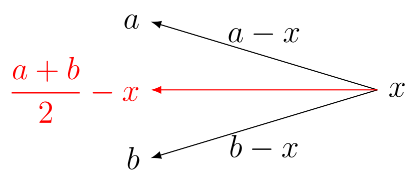

FIGURE 2 – Médiane

Variante : D'après l'identité du parallélogramme, on a
$$\begin{aligned} 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2 &= \|x-a+x-b\|^2 + \|x-a-(x-b)\|^2 \\ &= 4\|x - \frac{a+b}{2}\|^2 + \|a-b\|^2 \end{aligned}$$
d'où
$$\|x - \frac{a+b}{2}\|^2 = \|x-a\|^2 - \frac{1}{4}\|a-b\|^2 < \|x-a\|^2$$
et le résultat suit. L'argument est plus élémentaire (mais moins naturel ?) que le recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Notons $\alpha = \operatorname*{Inf}_{y \in \mathrm{C}} \|x-y\|$, borne inférieure finie d'une partie non vide de $\mathbb{R}_+$. Par caractérisation séquentielle, il existe $(y_n)_n \in \mathrm{C}^{\mathbb{N}}$ telle que
$$\|x - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$$
Ainsi, à partir d'un certain rang, la suite $(y_n)_n$ est à valeurs dans $\mathrm{C} \cap \mathrm{B}_f(x, \alpha+1)$ qui est un fermé borné de E de dimension finie donc un compact. Il existe alors une extractrice φ telle que
$$y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathrm{C} \cap \mathrm{B}_f(x, \alpha+1)$$
et par continuité de la norme
$$\|x - y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x-a\| = \alpha$$

Si b est un point de C distinct de a et qui réalise aussi la distance, alors

$$\|x-\frac{a+b}{2}\|<\|x-a\|=\alpha \quad \text{et} \quad \frac{a+b}{2}\in \mathrm{C}$$

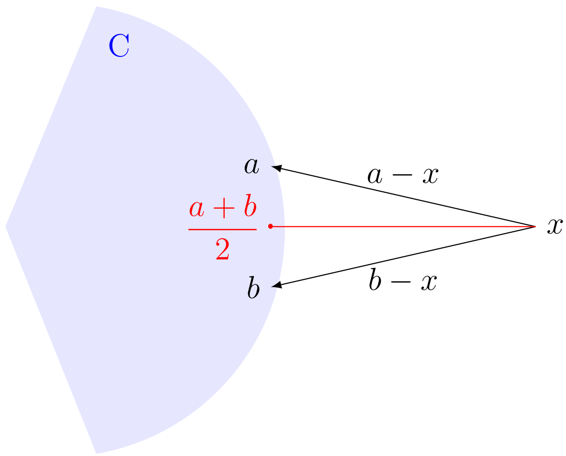

FIGURE 3 – Convexe et médiane

par convexité de C. Ceci est absurde. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } x\in \mathrm{E}, \text{ il existe un unique vecteur } a\in \mathrm{C} \text{ tel que } \|x-a\|=\mathrm{d}(x,\mathrm{C})}$$

3. Soit $x\in \mathrm{E}$. Pour $y\in \mathrm{C}$, on a

$$\|x-y\|^2=\|x-a+a-y\|^2=\|x-a\|^2+2\underbrace{\langle x-a,a-y\rangle}_{\geqslant 0}+\|a-y\|^2\geqslant \|x-a\|^2$$

La distance de x à C est donc réalisée en a autrement dit

$$\boxed{\text{Pour } x\in \mathrm{E} \text{ et } a\in \mathrm{C} \text{ tel que } \langle x-a,y-a\rangle\leqslant 0 \text{ pour tout } y\in \mathrm{C}, \text{ alors } a=p(x).}$$

4. On pose $z=ty+(1-t)p(x)$ avec $t\in[\,0\,;1\,]$. On a $z\in \mathrm{C}$ par convexité. Puis

$$\|x-z\|^2=\|x-p(x)-t(y-p(x))\|^2=\|x-p(x)\|^2-2t\,\langle x-p(x),y-p(x)\rangle+t^2\|y-p(x)\|^2$$

et $$-2\,\langle x-p(x),y-p(x)\rangle+t\|y-p(x)\|^2\xrightarrow[t\to 0]{}-2\,\langle x-p(x),y-p(x)\rangle<0$$

d'où $\|x-z\|<\|x-p(x)\|$ pour t assez proche de 0, ce qui est impossible. Ainsi

$$\boxed{\forall (x,y)\in \mathrm{E}\times \mathrm{C} \qquad \langle x-p(x),y-p(x)\rangle\leqslant 0}$$

5. On a

$$\begin{aligned}\langle x-y,p(x)-p(y)\rangle &= \langle x-p(x)+p(x)-p(y)+p(y)-y,p(x)-p(y)\rangle\\ &= \langle x-p(x),p(x)-p(y)\rangle+\|p(x)-p(y)\|^2+\langle p(y)-y,p(x)-p(y)\rangle\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\langle x-p(x),p(x)-p(y)\rangle=-\,\langle x-p(x),p(y)-p(x)\rangle\geqslant 0$$

et $$\langle p(y)-y,p(x)-p(y)\rangle=-\,\langle y-p(y),p(x)-p(y)\rangle\geqslant 0$$

D'où $$\boxed{\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2 \qquad \langle x-y,p(x)-p(y)\rangle\geqslant \|p(x)-p(y)\|^2}$$

Soit $(x,y)\in \mathrm{E}^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\langle x-y, p(x)-p(y)\rangle \leqslant \|x-y\|\|p(x)-p(y)\|$$

On en déduit

$$\|p(x)-p(y)\| \leqslant \|x-y\|$$

l'inégalité étant réalisée si $p(x)-p(y)=0_{\mathrm{E}}$. Ainsi

$$\boxed{\text{L'application } p \text{ est continue.}}$$