ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Programme de colles

⚠ Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 14 **20/01/25 - 24/01/25**

Programme :

Dans un espace E euclidien :

— Théorème de représentation de Riesz, existence et unicité de l'adjoint, linéarité et involution de l'adjonction, adjoint d'une composée, adjonction et inversibilté, matrice de l'adjoint dans une base orthonormée, stabilité par l'adjoint de l'orthogonal d'un sev stable ;

— Isométrie vectorielle, conservation du produit scalaire, caractérisation d'une isométrie avec l'image d'une base orthonormée, caractérisation d'une isométrie comme automorphisme dont l'inverse est l'adjoint, spectre d'une isométrie, groupe orthogonal $\mathcal{O}(\mathrm{E})$, isométrie directe et indirecte, sous-groupe groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$;

— Symétrie orthogonale, projecteur associé, caractérisation d'une symétrie orthogonale comme isométrie parmi les symétries, réflexion orthogonale ;

— Matrices orthogonales, inversibilité et inverse, caractérisation d'une matrice orthogonale avec les lignes ou colonnes comme base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, matrice d'une famille de vecteurs dans une base orthonormée, groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, sous-groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, caractérisation d'une isométrie avec sa matrice dans une base orthonormée ;

— Orientation entre bases, espace orienté, bases directes et indirectes ;

— Groupe $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, description de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$, groupe commutatif $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$, rotation dans un espace euclidien orienté de dimension 2, réduction dans une base orthonormée des éléments de $\mathcal{O}_2^-(\mathrm{E})$ avec E euclidien de dimension 2 ;

— Isométrie induite sur un sev stable, stabilité de l'orthogonal d'un sev stable, réduction dans une base orthonormée d'une isométrie de E euclidien de dimension n, cas particulier dans $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ avec E euclidien orienté de dimension 3 puis définition d'une rotation de E, corollaire matriciel ;

— Endomorphisme auto-adjoint, caractérisation matricielle dans une base orthonormée, caractérisation d'un projecteur orthogonal comme endomorphisme auto-adjoint parmi les projecteurs, orthogonalité des sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint, endomorphisme auto-adjoint induit sur un sev stable, stabilité de l'orthogonal d'un sev stable ;

— Spectre non vide pour un endomorphisme auto-adjoint, théorème spectral : si u est un endomorphisme auto-adjoint de E, alors E est la somme directe orthogonale de ses sous-espaces propres ou de manière équivalente il existe une base orthonormée de vecteurs propres, corollaire matriciel ;

— Endomorphisme auto-adjoint positif, défini positif, matrice positive, définie positive, matrice d'un endomorphisme (défini) positif dans une base orthonormée, écritures de $\langle u(x), x\rangle$ pour $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ et $x \in \mathrm{E}$ dans une base orthonormée de vecteurs propres ou dans la somme $\overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}} \mathrm{E}_\lambda(u)$, caractérisation spectrale du caractère positif, défini positif, encadrement et cas d'égalité pour $\langle u(x), x\rangle$ avec $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ et $x \in \mathrm{E}$.

Questions de cours : (avec preuve)

1. Description des éléments de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$;
2. Morphisme de groupes $(\mathbb{R}, +) \to (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$;
3. Dans E euclidien orienté de dimension 2 ou 3, écriture matricielle des éléments de $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ dans une base orthonormée directe ;
4. Réduction des éléments de $\mathcal{O}^-(\mathrm{E})$ avec E euclidien de dimension 2 ;
5. Caractérisation d'un endomorphisme auto-adjoint avec sa matrice dans une base orthonormée ;
6. Caractérisation d'un projecteur orthogonal comme endomorphisme auto-adjoint parmi les projecteurs ;
7. Stabilité de l'orthogonal d'un sev stable par un endomorphisme auto-adjoint ;
8. Spectre non vide pour un endomorphisme auto-adjoint ;
9. Théorème spectral (version vectorielle et corollaire matriciel) ;
10. Écritures de $\langle u(x), x\rangle$ pour $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ et $x \in \mathrm{E}$ dans une base orthonormée de vecteurs propres ou dans la somme $\overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(u)}} \mathrm{E}_\lambda(u)$;
11. Caractérisation spectrale du caractère positif, défini positif pour un endomorphisme auto-adjoint ;
12. Encadrement et cas d'égalité pour $\langle u(x), x\rangle$ avec $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ et $x \in \mathrm{E}$;
13. Réduction dans une base orthonormée d'une isométrie d'un espace euclidien de dimension n (preuve réservée au groupe (+)).