Préparation à l'interrogation n°15

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$;
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;
3. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n\left(-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-1+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$.

2 Trigonométrie

1. $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$;
2. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b}$;
3. $\cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$;
4. $\sin(t)^2 = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$.

3 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
2. $\displaystyle\int^x (1-t)^n \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$

4 Algèbre linéaire

1. Soient $\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{G}$ des $\mathbb{K}$-ev, $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g\in\mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. On a
$$g\circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Ker}\ g$$
2. Formule de Grassmann : Soient F,G sev de dimensions finies de E un $\mathbb{K}$-ev. On a
$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim\mathrm{F} + \dim\mathrm{G} - \dim\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$$
3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F, G des sev de E. On a
$$\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G} \iff \begin{cases}\dim\mathrm{F}+\dim\mathrm{G}=\dim\mathrm{E}\\ \mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_{\mathrm{E}}\}\end{cases} \iff \begin{cases}\dim\mathrm{F}+\dim\mathrm{G}=\dim\mathrm{E}\\ \mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathrm{E}\end{cases}$$
$$\iff \exists\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{G}} \text{ bases respectives de } \mathrm{F},\mathrm{G} \mid \mathscr{B}_{\mathrm{F}}\uplus\mathscr{B}_{\mathrm{G}} \text{ base de } \mathrm{E}$$
4. Théorème du rang : Soit $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-ev.
On a $$\dim\mathrm{E} = \dim\mathrm{Ker}\ f + \mathrm{rg}\,(f)$$
5. Soit $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec E et F des $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie. On a
$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

5 Équation différentielle linéaire

Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et $(t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) & \text{(L)} \\ x(t_0) = x_0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

et celle-ci est donnée par

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(s)} b(s) \,\mathrm{d}s \right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A}(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) \,\mathrm{d}s$$

6 Exercices types

1. Fonction Γ : relation fonctionnelle, régularité $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,; +\infty\,[$;
2. Intégrales de Bertrand ;
3. Polynôme caractéristique d'une matrice compagne ;
4. Inégalité arithmético-géométrique ;
5. Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;
6. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$;
7. Fermeture de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

7 Exercice type

Feuille 58, exercice 9.

8 Exercice type - Décomposition polaire

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$.

Corrigé : On a $\mathrm{A}^\top \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Ainsi, il existe $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$. On a S inversible puisque $\det(\mathrm{S})^2 = \det(\mathrm{A})^2 > 0$. Posons ensuite $\mathrm{O} = \mathrm{AS}^{-1}$. On a

$$\mathrm{O}^\top\mathrm{O} = (\mathrm{AS}^{-1})^\top \mathrm{AS}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}^\top\mathrm{AS}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}^2\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{I}_n$$

On conclut $\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \qquad \exists (\mathrm{O}, \mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad | \quad \mathrm{A} = \mathrm{OS}}$

9 Questions de cours

Probabilités, développements en série entière usuels, graphes usuels.