Devoir en temps libre n°12

Problème I

Soit n entier non nul, $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs et

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que la matrice B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser son spectre.
2. Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, établir
$$\max \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) = \operatorname*{Sup}_{\mathrm{X} \in \mathrm{S}(0,1)} \langle \mathrm{X}, \mathrm{MX} \rangle$$
où $\mathrm{S}(0,1)$ désigne la sphère unité de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.
3. En déduire $$\max \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \leqslant \sqrt{n-1} + \operatorname*{Max}_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} a_i$$

Problème II

Soit n entier non nul. On munit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$ pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices *bistochastiques* de E, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ vérifiant

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \qquad a_{i,j} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} = 1$$

On note aussi $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutation $\mathrm{M}_\sigma \in \mathrm{E}$ avec

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \qquad (\mathrm{M}_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$$

où $\sigma \in \mathrm{S}_n$. Dans ce qui suit, les matrices A et B sont symétriques réelles.

1. Soit φ une forme linéaire sur E. Justifier que l'application φ atteint un minimum sur $\mathcal{B}_n$. On admet que celui-ci est atteint en une matrice de $\mathcal{P}_n$.
2. Pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ et P, Q dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, établir $\|\mathrm{PMQ}\| = \|\mathrm{M}\|$.
3. Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{P} = \left(p_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et deux matrices diagonales réelles $\mathrm{D_A}$ et $\mathrm{D_B}$ telles que
$$\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|^2 = \|\mathrm{D_A P} - \mathrm{P D_B}\|^2$$

4. Montrer que la matrice $\mathrm{R} = \left(r_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par $r_{i,j} = p_{i,j}^2$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ est bistochastique et établir

$$\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} r_{i,j} \left(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})\right)^2$$

où $\lambda_1(\mathrm{A}), \ldots, \lambda_n(\mathrm{A})$ et $\lambda_1(\mathrm{B}), \ldots, \lambda_n(\mathrm{B})$ désignent respectivement les valeurs propres de A et B.

5. En déduire $$\underset{\sigma \in \mathrm{S}_n}{\mathrm{Min}} \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_{\sigma(j)}(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})\right)^2 \leqslant \|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|^2$$

Problème III (bonus)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$.

1. Justifier qu'il existe $\mathrm{R} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|\mathrm{A} - \mathrm{R}\|$.
2. Montrer qu'il existe un couple $(\mathrm{O}, \mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$.
3. Établir que pour tout $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, il existe $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\|\mathrm{A} - \mathrm{P}\|^2 - \|\mathrm{A} - \mathrm{O}\|^2 = 2 \left\langle \mathrm{D}, \mathrm{I}_n - \mathrm{U} \right\rangle$$

avec D diagonale semblable à S.

4. Conclure que $$\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|\mathrm{A} - \mathrm{O}\|$$