Séance 4 - MP+ - 24/01/25

Exercice 1 (****)

Soit E euclidien. On n'utilisera pas le théorème spectral au cours de ce problème. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est dit *normal* si u et u^* commutent.

1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ normal et F un sev de E stable par u. Montrer que F est stable par u^*, $\mathrm{F}^\perp$ stable par u et u^* et que u_F est normal.
2. On suppose que $\dim \mathrm{E} = 2$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ normal sans valeur propre réelle. Dans $\mathscr{B}$ base orthonormée de E, montrer que
$$\mathrm{mat}_\mathscr{B} u = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$
3. Plus généralement, montrer que pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ normal, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{mat}_\mathscr{B} u$ est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux du type
$$(\lambda) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a_i, b_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

Exercice 2 (****)

Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul.

1. Montrer $\quad \mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall k \in [\![1\,;n]\!] \qquad \det \left(m_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1\,;k]\!]^2} > 0$
2. Application : Montrer que $\left(t^{|i-j|}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ avec $t \in \left]-1\,;1\right[$ puis montrer $\left(\dfrac{1}{1+|i-j|}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$, $\mathrm{C} > 0$ et F un sev de E tel que
$$\forall f \in \mathrm{F} \qquad \|f\|_\infty \leqslant \mathrm{C}\|f\|_2$$

1. Montrer que $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$.
2. Montrer que F est de dimension finie inférieure ou égale à C^2.

Exercice 4 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire
$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
On pose $\mathrm{H} = \left\{ f \in \mathrm{E} \mid \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$. Déterminer $\mathrm{H}^\perp$.

Exercice 5 (***)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On note S la sphère unité de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on munit du produit scalaire canonique. Soit F un sev non trivial de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose

$$\mathrm{R_M(F)} = \underset{\mathrm{X} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{S}}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{X}^\top \mathrm{M X}$$

1. Montrer que $\mathrm{R_M(F)}$ est bien défini.
2. On considère $(v_1, \ldots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1(\mathrm{M}) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mathrm{M}))$. Soit $d \in [\![1\,;\, n]\!]$. Si $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_d)$, montrer
$$\mathrm{R_M(F)} = \lambda_d(\mathrm{M})$$
3. On considère à présent F un sev de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension d entier et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(v_d, \ldots, v_n)$. Montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \cap \mathrm{S} \neq \varnothing$. En déduire
$$\mathrm{R_M(F)} \geqslant \lambda_d(\mathrm{M})$$
4. Soient A, B symétriques réelles. On note $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$.
   (a) On considère F et G deux sev de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'intersection non triviale. Montrer
   $$\mathrm{R_C(F \cap G)} \leqslant \mathrm{R_A(F)} + \mathrm{R_B(G)}$$
   (b) Soient k, ℓ, m entiers non nuls tels que $\ell + m = k + n$. Montrer
   $$\lambda_k(\mathrm{C}) \leqslant \lambda_\ell(\mathrm{A}) + \lambda_m(\mathrm{B})$$
   (c) Soient k, ℓ, m entiers non nuls tels que $\ell + m = k + 1$. Montrer
   $$\lambda_k(\mathrm{C}) \geqslant \lambda_\ell(\mathrm{A}) + \lambda_m(\mathrm{B})$$
5. Montrer que l'application N qui à $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ associe $\underset{\mathrm{X} \in \mathrm{S}}{\mathrm{Max}}\, \|\mathrm{MX}\|$ est une norme sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
6. Exprimer $\mathrm{N(M)}$ en fonction des $\lambda_k(\mathrm{M})$.
7. Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. Montrer que l'application $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \mathrm{M} \mapsto \lambda_k(\mathrm{M})$ est lipschitzienne.

Exercice 6 (***)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul et u_1, …, u_p des endomorphismes auto-adjoints de E vérifiant

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{rg}\; u_i = n \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \sum_{i=1}^{p} \langle u_i(x), x \rangle = \|x\|^2$$

Montrer que $\mathrm{E} = \overset{\perp}{\bigoplus_{i \in [\![1\,;\, p]\!]}} \mathrm{Im}\; u_i$ et que les u_i sont des projecteurs orthogonaux.

Indications

Exercice 1 (****)

Indications : 1. Considérer une base $\mathscr{B}$ orthonormée de E pour établir l'existence en passant par l'écriture matricielle dans $\mathscr{B}$.
2. Considérer une base adaptée à $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$ puis écrire matriciellement le caractère normal.
4. Suivre une trame identique à celle de la réduction des isométries

---

Exercice 2 (****)

Indications : 1. Noter $\mathrm{M}_k = \big(m_{i,j}\big)_{(i,j)\in[\![1\,;\,k]\!]^2}$ pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Pour le sens direct, établir que $\mathrm{M}_k \in \mathscr{S}_k^{++}(\mathbb{R})$. Pour le sens indirect, procéder par récurrence sur n. Pour l'hérédité avec $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_{n+1}(\mathbb{R})$, invoquer le théorème spectral sur M_n. Avec $\mathrm{Q} = \mathrm{diag}(\mathrm{P}, 1)$ où P est orthogonale telle que $\mathrm{P}^{\top}\mathrm{M}_n\mathrm{P}$ diagonale, déterminer la forme de $\mathrm{Q}^{\top}\mathrm{MQ}$ puis exprimer son déterminant.
2. Mettre en œuvre le critère de la question précédente.

Exercice 3 (***)

Indications : 1. Considérer une suite de fonctions assez classique.
2. Munir F du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(f, g) \in \mathrm{F}^2$. Considérer une famille orthonormée $(f_1, \ldots, f_p)$ de F et écrire l'inégalité pour $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x)$ avec les λ_i réels et $x \in [\,0\,;1\,]$. Choisir ensuite les λ_i en fonction de x judicieusement.

Exercice 4 (****)

Indications : Pour $u \in \mathrm{H}^{\perp}$, considérer $u_\varepsilon \in \mathrm{E}$ par $u_\varepsilon(t) = 0$ pour $t \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$, $u_\varepsilon(t) = u(t)$ pour $t \in \left[\dfrac{1}{2} + \varepsilon\,;1\right]$ et u_ε affine sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2} + \varepsilon\right]$. En déduire $u(t)$ pour $t \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ puis considérer $u - 2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} u(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 (***)

Indications : 1. Déterminer une expressions de $\mathrm{X}^{\top}\mathrm{MX}$ pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. Décomposer $\mathrm{X} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{S}$ dans $(v_1, \ldots, v_n)$.
3. Utiliser la formule de Grassmann.
4.(b) Introduire des bases orthonormées adaptées puis utiliser les résultats des questions 2 et 3.
4.(c) Relier $\lambda_i(-\mathrm{M})$ avec $\lambda_j(\mathrm{M})$ avec j fonction de i pour $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ puis utiliser le résultat de la question précédente.
7. Utiliser le résultat de la question 4.(c)

Exercice 6 (***)

Indications : Montrer que $\sum_{i=1}^{p} u_i = \mathrm{id}$ puis le caractère projecteur de chaque u_i et enfin l'orthogonalité des $\mathrm{Im}\ u_i$.