ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°63

Exercice 1 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et $\mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_n + \mathrm{X}_{n+1} + \mathrm{X}_{n+2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k - 3p\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Corrigé : Les Y_n ne sont pas indépendantes ! En effet, on a

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = 3, \mathrm{Y}_{n+1} = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = 3) \times \mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n+1} = 0)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $n \geqslant 1$. On a

$$\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k - 3p\right| \geqslant \varepsilon\right\} \subset \bigcup_{\ell=0}^{2} \left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_{k+\ell} - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

D'où
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k - 3p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \sum_{\ell=0}^{2} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_{k+\ell} - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Pour $\ell \in [\![\,0\,;\,2\,]\!]$, les variables $(\mathrm{X}_{k+\ell})_k$ sont indépendantes, de même loi, avec des moments d'ordre deux. D'après la loi faible des grands nombres, il s'ensuit

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k - 3p\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 2 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire de loi $\mathscr{U}_{[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]}$ avec n entier. On suppose n non premier avec $n = ab$ et a, b des entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Montrer qu'il existe un unique couple de variables aléatoires (Q, R) à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{X} = a\mathrm{Q} + \mathrm{R}$ avec $\mathrm{R}(\Omega) \subset [\![\,0\,;\,a-1\,]\!]$.
2. Préciser la loi de (Q, R) puis de Q et de R.
3. En déduire qu'il existe Y et Z, variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont on précisera les lois telles que $\mathrm{X} \sim \mathrm{Y} + \mathrm{Z}$.

Corrigé : 1. Soit $\omega \in \Omega$. D'après le théorème de la division euclidienne il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times [\![\,0\,;\,a-1\,]\!]$ tel que $\mathrm{X}(\omega) = aq + r$. Ceci prouve l'unicité du couple de variables aléatoires solutions sous réserve d'existence. On définit l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times [\![\,0\,;\,a-1\,]\!], x \mapsto (q, r)$ qui à x associe son couple quotient-reste. Cette application est bien définie et bijective d'après le théorème de la division euclidienne et on pose $(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) = \varphi(\mathrm{X})$. Il s'agit bien d'une variable aléatoire discrète en tant que fonction d'une variable aléatoire discrète et par construction, on a

$$\boxed{\mathrm{X} = a\mathrm{Q} + \mathrm{R} \text{ avec } \mathrm{R}(\Omega) \subset [\![\,0\,;\,a-1\,]\!]}$$

Remarque : On peut expliciter Q et R : on a $\mathrm{Q} = \left\lfloor \dfrac{\mathrm{X}}{a} \right\rfloor$ et $\mathrm{R} = \mathrm{X} - a\mathrm{Q}$.

2. Soit $(q, r) \in [\![0\,;\, b-1]\!] \times [\![0\,;\, a-1]\!]$. D'après le théorème de la division euclidienne, l'application φ précédemment définie est une bijection et par suite

$$\mathbb{P}((\mathrm{Q}, \mathrm{R}) = (q, r)) = \mathbb{P}(\varphi(\mathrm{X}) = \varphi(x)) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = \frac{1}{n}$$

On détermine les lois marginales avec

$$\mathbb{P}(\mathrm{Q} = q) = \sum_{r=0}^{a-1} \mathbb{P}((\mathrm{Q}, \mathrm{R}) = (q, r)) = \frac{a}{n} = \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathrm{R} = r) = \sum_{q=0}^{b-1} \mathbb{P}((\mathrm{Q}, \mathrm{R}) = (q, r)) = \frac{b}{n} = \frac{1}{a}$$

Ainsi $\boxed{(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \sim \mathscr{U}_{[\![0\,;\, a-1]\!] \times [\![0\,;\, b-1]\!]} \qquad \mathrm{Q} \sim \mathscr{U}_{[\![0\,;\, b-1]\!]} \qquad \mathrm{R} \sim \mathscr{U}_{[\![0\,;\, a-1]\!]}}$

3. Soit $(q, r) \in [\![0\,;\, b-1]\!] \times [\![0\,;\, a-1]\!]$. On a

$$\mathbb{P}(\mathrm{Q} = q, \mathrm{R} = r) = \frac{1}{n} = \frac{1}{b} \times \frac{1}{a} = \mathbb{P}(\mathrm{Q} = q)\mathbb{P}(\mathrm{R} = r)$$

ce qui prouve que les variables Q et R sont indépendantes et on conclut

$$\boxed{\mathrm{X} = a\mathrm{Q} + \mathrm{R} \text{ avec } a\mathrm{Q} \text{ et R indépendantes et } a\mathrm{Q} \sim \mathscr{U}_{a[\![0\,;\, b-1]\!]},\ \mathrm{R} \sim \mathscr{U}_{[\![0\,;\, a-1]\!]}.}$$

Exercice 3 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(x)$ avec $x \in [0\,;1]$. Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Pour n entier non nul, on note $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ et on pose

$$\forall x \in [0\,;1] \qquad \mathrm{B}_n(f)(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right]$$

1. Préciser la loi de S_n puis déterminer une expression sommatoire de $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right]$.
2. Si x est un point de continuité de f, montrer

$$\mathrm{B}_n(f)(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$$

Corrigé : 1. D'après le cours et par transfert, on a

$$\boxed{\mathrm{S}_n \sim \mathscr{B}(n, x) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}}$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in [0\,;1] \qquad |x - t| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(t)| \leqslant \varepsilon$$

On a

$$|\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)| = \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right]\right| \leqslant \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right|\right]$$

Posons $\mathrm{A}_n = \left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right| > \eta\right\}$. Ainsi

$$\begin{aligned} |\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)| &\leqslant \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\mathrm{A}_n}\right] + \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\overline{\mathrm{A}_n}}\right] \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

D'après la loi faible des grands nombres, on a $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{o}(1)$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{B}_n(f)(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)}$$

Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y indépendantes de loi uniforme sur $\mathcal{P}(\llbracket 1\,;\, n \rrbracket)$. Calculer $\mathbb{E}(\text{Card X})$ puis $\mathbb{E}(\text{Card X} \cap \mathrm{Y})$.

Corrigé : Les variables aléatoires X et Y sont finies donc Card X et Card Y également et admettent donc une espérance. On a clairement $(\text{Card X})(\Omega) = (\text{Card X} \cap \mathrm{Y})(\Omega) \subset \llbracket 0\,;\, n \rrbracket$ et $\text{Card } \mathcal{P}(\llbracket 1\,;\, n \rrbracket) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ puisque choisir une partie équivaut à choisir une partie à k éléments pour $k \in \llbracket 0\,;\, n \rrbracket$ et il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir une partie à k éléments. Puis, on trouve

$$\mathbb{E}(\text{Card X}) = \sum_{k=0}^{n} k \mathbb{P}(\text{Card X} = k)$$

et comme la variable X suit la loi uniforme

$$\forall k \in \llbracket 0\,;\, n \rrbracket \qquad \mathbb{P}(\text{Card X} = k) = \frac{\text{Card}\,\{\mathrm{A} \subset \llbracket 1\,;\, n \rrbracket \mid \text{Card A} = k\}}{2^n} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

autrement dit $\text{Card X} \sim \mathscr{B}(n, 1/2)$. On obtient

$$\boxed{\mathbb{E}(\text{Card X}) = \frac{n}{2}}$$

Ensuite, il vient
$$\mathbb{E}(\text{Card X} \cap \mathrm{Y}) = \sum_{k=0}^{n} k \mathbb{P}(\text{Card X} \cap \mathrm{Y} = k)$$

et comme les variables X et Y sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $\mathcal{P}(\llbracket 1\,;\, n \rrbracket)$, alors le couple (X, Y) suit la loi uniforme sur $\mathcal{P}(\llbracket 1\,;\, n \rrbracket)^2$ et on a

$$\forall k \in \llbracket 0\,;\, n \rrbracket \qquad \mathbb{P}(\text{Card X} \cap \mathrm{Y} = k) = \frac{\text{Card}\,\{\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \llbracket 1\,;\, n \rrbracket \mid \text{Card A} \cap \mathrm{B} = k\}}{2^{2n}}$$

Reste donc évaluer ce numérateur qu'on note N. Compter les parties A, B dont l'intersection est de cardinal égal à k équivaut à choisir d'abord cette intersection avec $\binom{n}{k}$ choix possibles puis choisir les éléments de A hors de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ soit choisir $\ell \in \llbracket 0\,;\, n-k \rrbracket$ éléments avec $\binom{n-k}{\ell}$ choix possibles et choisir les éléments de B qui ne sont pas dans $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ soit choisir $p \in \llbracket 0\,;\, n-(k+\ell) \rrbracket$ éléments avec $\binom{n-(k+\ell)}{p}$ choix possibles. Ainsi, on trouve

$$\mathrm{N} = \sum_{\ell=0}^{n-k} \sum_{p=0}^{n-(k+\ell)} \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}\binom{n-(k+\ell)}{p} = \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} 2^{n-(k+\ell)} \binom{n-k}{\ell}$$

On remarque la somme restante est un binôme de Newton développé d'où

$$\mathrm{N} = \binom{n}{k}(1+2)^{n-k} = 3^{n-k}\binom{n}{k}$$

et donc
$$\forall k \in \llbracket 0\,;\, n \rrbracket \qquad \mathbb{P}\left(\text{Card X} \cap \mathrm{Y} = k\right) = \binom{k}{n}\left(\frac{1}{k}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$$

c'est-à-dire $\text{Card X} \cap \mathrm{Y} \sim \mathscr{B}(n, 1/4)$ et on conclut

$$\boxed{\mathbb{E}(\text{Card X} \cap \mathrm{Y}) = \frac{n}{4}}$$

Exercice 5 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y des variables aléatoires réelles discrètes à valeurs dans $[\, a\,; b\,]$.

1. Justifier que X et Y admettent des moments à tout ordre, c'est-à-dire X^k et Y^k d'espérance finie pour tout k entier.

2. On suppose $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}(\mathrm{X}^k) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}^k)$$

   Montrer que X et Y ont même loi.

Corrigé : 1. Les variables X et Y sont bornées et X^k, Y^k de même pour tout k entier ce qui prouve

$$\boxed{\text{Les variables X et Y admettent des moments à tout ordre.}}$$

2. Par linéarité de l'espérance, il vient

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \mathbb{E}(\mathrm{P}(\mathrm{X})) = \mathbb{E}(\mathrm{P}(\mathrm{Y}))$$

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\, a\,; b\,], \mathbb{R})$. On a $f(\mathrm{X})$ bornée donc dans L^1. Pour $\varepsilon > 0$, d'après le théorème de Weierstrass, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\|\mathrm{P} - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ d'où, par inégalité triangulaire

$$|\mathbb{E}(f(\mathrm{X})) - \mathbb{E}(\mathrm{P}(\mathrm{X}))| = |\mathbb{E}((f - \mathrm{P})(\mathrm{X})| \leqslant \mathbb{E}(|f - \mathrm{P}|\,(\mathrm{X})) \leqslant \|f - \mathrm{P}\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Il s'ensuit de nouveau par inégalité triangulaire

$$|\mathbb{E}(f(\mathrm{X})) - \mathbb{E}(f(\mathrm{Y}))| \leqslant 2\varepsilon$$

et ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$ d'où

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([\, a\,; b\,], \mathbb{R}) \qquad \mathbb{E}(f(\mathrm{X})) = \mathbb{E}(f(\mathrm{Y}))$$

Soit $x_0 \in [\, a\,; b\,]$ et $\delta = \max(x_0 - a, b - x_0)$. On définit

$$f : [\, a\,; b\,] \times \,]\, 0\,; \delta\,[\to \mathbb{R}, (x, \varepsilon) \mapsto f(x, \varepsilon)$$

telle que pour $\varepsilon \in \,]\, 0\,; \delta\,[$, on a $f(x_0, \varepsilon) = 1$, $f(\cdot, \varepsilon)$ affine sur $[\, x_0 - \varepsilon\,; x_0\,] \cap \,]\, a\,; b\,[$ et sur $[\, x_0\,; x_0 + \varepsilon\,] \cap \,]\, a\,; b\,[$, nulle ailleurs et $f(\cdot, \varepsilon)$ continue sur $[\, a\,; b\,]$. Soit $\varepsilon \in \,]\, 0\,; \delta\,[$. On pose $\mathrm{A} = \mathrm{X}(\Omega) \cup \mathrm{Y}(\Omega)$. On suppose A dénombrable et on note $\mathrm{A} = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec les a_n deux à deux distincts. Par transfert, il vient

$$\mathbb{E}(f(\mathrm{X}, \varepsilon)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(a_n, \varepsilon)\mathbb{P}(\mathrm{X} = a_n)$$

On a $$\forall (n, \varepsilon) \in \mathbb{N} \times \,]\, 0\,; \delta\,[\qquad |f(a_n, \varepsilon)\mathbb{P}(\mathrm{X} = a_n)| \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} = a_n)$$

d'où la convergence normale de $\sum f(a_n, \cdot)\mathbb{P}(\mathrm{X} = a_n)$ par σ-additivité et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(a_n, \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \mathbb{1}_{\{x_0\}}(a_n)$$

Par double limite, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(a_n, \varepsilon)\mathbb{P}(\mathrm{X} = a_n) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{x_0\}}(a_n)\mathbb{P}(\mathrm{X} = a_n)$$

puis par transfert $$\mathbb{E}(f(\mathrm{X}, \varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{x_0\}}(\mathrm{X})) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_0)$$

et le résultat vaut aussi en remplaçant X par Y d'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}(f(\mathrm{X}, \varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}(f(\mathrm{Y}, \varepsilon)) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} = x_0)$$

Si A est fini, le résultat a toujours lieu de manière triviale puisque le transfert sur $\mathbb{E}(f(\mathrm{X},\varepsilon))$ ou $\mathbb{E}(f(\mathrm{Y},\varepsilon))$ fait apparaître une somme finie. On conclut

$$\boxed{\text{Les variables X et Y ont même loi.}}$$

Remarque : Il s'agit d'un cas particulier du célèbre « Problème des moments ». Sans l'hypothèse que les variables X et Y sont bornées, le résultat est faux. On peut trouver un contre-exemple explicite dans l'ouvrage *Counterexamples in Probability* de *J. Stoyanov.*

Exercice 6 (****)

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![-1\,;\,1]\!]$. On pose

$$\forall t\in[0\,;1]\qquad f(t)=\sqrt{1-t^2}$$

et $$\forall n\geqslant 1\qquad \mathrm{I}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\quad\text{et}\quad \mathrm{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\times(1+\varepsilon_k)$$

1. Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite ℓ que l'on précisera.
2. Établir $\qquad \forall\varepsilon>0\qquad \mathbb{P}(|\mathrm{X}_n-\ell|\geqslant\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$
3. En déduire $\qquad \forall\varepsilon>0\qquad \mathbb{P}(|\tan(\mathrm{X}_n)-1|\geqslant\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$
4. Montrer $\quad \forall\varepsilon>0\quad \exists\mathrm{M}>0\quad|\quad \forall n\geqslant 1\qquad \mathbb{P}(\sqrt{n}\,|\mathrm{X}_n-\ell|\leqslant\mathrm{M})\geqslant 1-\varepsilon$

Corrigé : 1. D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a

$$\boxed{\mathrm{I}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}}$$

2. On pose $\Delta_n=\mathrm{I}_n-\ell$ pour n entier non nul. Il vient

$$\mathbb{E}\left[(\mathrm{X}_n-\ell)^2\right]=\Delta_n^2+2\Delta_n\times\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\times f\left(\frac{k}{n}\right)\right]+\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\times\varepsilon_k\right)^2\right]$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\times f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\times\mathbb{E}(\varepsilon_k)=0$$

D'où $$\mathbb{E}\left[(\mathrm{X}_n-\mathrm{I})^2\right]=\Delta_n^2+\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\times\varepsilon_k\right)$$

Les variables $f\left(\dfrac{k}{n}\right)\times\varepsilon_k$ sont indépendantes et il vient

$$\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\times\varepsilon_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{V}(\varepsilon_1)=\frac{\mathbb{V}(\varepsilon_1)}{n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{f^2\left(\frac{k}{n}\right)}_{\leqslant\|f^2\|_\infty}=\mathrm{o}(1)$$

Ainsi $$\mathbb{E}\left[(\mathrm{X}_n-\ell)^2\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Soit $\varepsilon>0$. D'après l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_n-\ell|\geqslant\varepsilon\right)=\mathbb{P}\left((\mathrm{X}_n-\ell)^2\geqslant\varepsilon^2\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[(\mathrm{X}_n-\ell)^2\right]$$

Il s'ensuit $$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_n - \ell| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

3. La fonction tan est continue en ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x-\ell| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |\tan(x) - 1| < \varepsilon$$
et par contraposition
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\tan(x) - 1| \geqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |x-\ell| \geqslant \eta$$
d'où $$\{|\tan(\mathrm{X}_n) - 1| \geqslant \varepsilon\} \subset \{|\mathrm{X}_n - \ell| \geqslant \eta\}$$
Ainsi $$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|\tan(\mathrm{X}_n) - 1| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Remarque : La fonction f décroît strictement. Ainsi, pour n entier non nul
$$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad f\left(\frac{k}{n}\right) < \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$$
d'où $$0 \leqslant \mathrm{X}_n \leqslant 2\mathrm{I}_n < 2\ell = \frac{\pi}{2}$$
ce qui prouve que $\tan(\mathrm{X}_n)$ est bien défini pour n entier non nul.

4. Soit $\mathrm{M} > 0$. D'après l'inégalité de Markov, on a
$$\mathbb{P}(\sqrt{n}\,|\mathrm{X}_n - \ell| \geqslant \mathrm{M}) = \mathbb{P}(n(\mathrm{X}_n-\ell)^2 \geqslant \mathrm{M}^2) \leqslant \frac{1}{\mathrm{M}^2}\mathbb{E}(n(\mathrm{X}_n - \ell)^2)$$
On a établi précédemment $\quad \mathbb{E}((\mathrm{X}_n-\ell)^2) \leqslant \Delta_n^2 + \dfrac{1}{n}\mathbb{V}(\varepsilon_1)\|f^2\|_\infty$

On a $$\Delta_n = \mathrm{S}_n + \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right)\,\mathrm{d}t$$
Par inégalité des accroissements finis, on trouve
$$\forall k \in [\![1\,;\,n-1]\!] \qquad \forall t \in \left[\frac{k-1}{n}\,;\,\frac{k}{n}\right] \qquad \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}\left(\frac{k}{n} - t\right)$$
d'où $$\mathrm{S}_n \leqslant \frac{1}{2n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$
On pose $$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$$
Par croissance de g, on a
$$\forall k \in [\![1\,;\,n-1]\!] \qquad \frac{1}{n}g\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)\,\mathrm{d}t$$
d'où, après sommation $$\mathrm{T}_n \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Enfin, on observe
$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

On en déduit
$$\mathrm{S}_n \leqslant \frac{1}{2n}\mathrm{T}_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et par conséquent
$$\Delta_n = \mathrm{S}_n + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où
$$\Delta_n^2 = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc
$$\mathbb{E}(n(\mathrm{X}_n - \ell)^2) = \mathrm{O}(1)$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$, on peut choisir M assez grand tel que
$$\forall n \geqslant 1 \qquad \frac{1}{\mathrm{M}^2}\mathbb{E}(n(\mathrm{X}_n - \ell)^2) \leqslant \varepsilon$$

Passant au complémentaire, on conclut
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{M} > 0 \quad | \quad \mathbb{P}(\sqrt{n}\,|\mathrm{X}_n - \ell| \leqslant \mathrm{M}) \geqslant 1 - \varepsilon}$$