Feuille d'exercices n°61

Exercice 1 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X variable aléatoire réelle discrète telle que $\mathrm{X}(\Omega) \subset [\, a\,; b\,]$.

1. Établir $$\mathbb{V}(\mathrm{X}) \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$
2. Cette inégalité est-elle optimale ?

Exercice 2 (**)

Soit E préhilbertien réel et $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$. On suppose qu'il existe $\mathrm{C} \geqslant 0$ tel que

$$\forall (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \qquad \|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k\| \leqslant \mathrm{C}$$

Montrer $$\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2 \leqslant \mathrm{C}^2$$

Exercice 3 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle finie. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{L}_{\mathrm{X}}(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}})$$

Montrer que L_{X} caractérise la loi de X.

Exercice 4 (**)

Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in [\, 0\,; 1\,]$.

1. Rappeler la loi de $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.
2. Pour $0 \leqslant m < n$, déterminer la loi conditionnelle $\mathbb{P}_{\mathrm{S}_m | \mathrm{S}_n = \ell}$ avec $\ell \in [\![\, 0\,; n\,]\!]$.

Exercice 5 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{U}_{\{-1,1\}}$.

1. Montrer $\forall (t, \varepsilon) \in \,]\, 0\,; +\infty\,[^2$ $$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-tn\varepsilon} \operatorname{ch}^n t$$
2. Pour $t > 0$, comparer $\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$ et $\operatorname{ch} t$.
3. En déduire $\forall \varepsilon > 0$ $$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}$$

Exercice 6 (*)

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(1/2)$. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier non nul. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \dfrac{2n}{3}\right)$.

Exercice 7 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1\,;\,\mathrm{N}]\!]$ et $f \in \mathscr{C}^1([\,1\,;\mathrm{N}\,], \mathbb{R})$. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier non nul.

1. Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^2$, comparer $\mathbb{E}(\mathrm{X})^2$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)$.
2. Montrer $$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f\left(\mathbb{E}(\mathrm{X}_1)\right)$$

Exercice 8 (**)

Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ et N une variable aléatoire indépendante des X_i avec $\mathrm{N} \sim \mathscr{B}(n,p)$ où n est un entier non nul et $p \in \,]\,0\,;1\,[$. On note $\mathrm{Y} = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_i$.

1. Justifier que Y est une variable aléatoire réelle discrète.
2. Déterminer la loi de Y à l'aide de fonctions génératrices mais sans recours aux familles sommables. On pourra utiliser la variable aléatoire $\sum\limits_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\mathrm{N}=j\}}$.
3. Retrouver le résultat précédent sans utiliser les fonctions génératrices.

Exercice 9 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

1. Montrer $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n^2}\right) \sin\left(\frac{\varepsilon_k}{n}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
2. Établir $$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$ avec ℓ un réel à préciser.
3. En déduire $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2} + \frac{\varepsilon_k}{n}\right) - \ell\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Exercice 10 (**)

Une urne contient n billes numérotées de 1 à n. On saisit une poignée de billes et on note X la somme des numéros des billes. En supposant que toutes les poignées sont équiprobables, que vaut $\mathbb{E}(\mathrm{X})$?