Feuille d'exercices n°62

Exercice 1 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{X}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

Pour X variable aléatoire avec $\mathrm{X}(\Omega)$ fini, on note

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \Phi_{\mathrm{X}}(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\,it\mathrm{X}}\right)$$

On définit également $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sinc} t = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Déterminer une expression de $\Phi_{\mathrm{X}_n}(t)$ sous forme de produit pour tout n entier non nul et t réel.
2. Pour n entier non nul et t réel, en considérant $\sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right)\Phi_{\mathrm{X}_n}(t)$, déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(\Phi_{\mathrm{X}_n})_{n\geqslant 1}$.
3. Étudier la continuité de $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_{\mathrm{X}_n}$.
4. Justifier que X_n et $-\mathrm{X}_n$ ont même loi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire la limite simple de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi_n \colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \mathbb{E}(\cos(t\mathrm{X}_n)) \end{cases}$$
6. La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément ?

Exercice 2 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2 \qquad |\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})| \leqslant \frac{1}{4}$$

puis préciser le cas d'égalité.

Exercice 3 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et X variable aléatoire vérifiant $|\mathrm{X}| \leqslant \mathrm{M}$ presque sûrement avec $\mathrm{M} \geqslant 0$. On suppose qu'il existe $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi telles que X et $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ aient même loi. Montrer que pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, on a

$$\mathrm{X}_i \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n} \quad \text{p.s.} \quad \text{et} \quad |\mathrm{X}_i| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n} \quad \text{p.s.}$$

Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\sigma_n \sim \mathscr{U}_{\mathrm{S}_n}$. On note X_n le nombre de points fixes de σ_n.

Montrer $$\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$$

Exercice 5 (***)

Peut-on truquer deux dés à six faces de sorte que la somme des points soit équirépartie sur $[\![2\,;\,12]\!]$?

Exercice 6 (***)

Soit $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et $q = 1 - p$. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \qquad \mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{S}_n - np}{\sqrt{npq}}$$

1. Donner la loi et la fonction génératrice de S_n.
2. Déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n)$, $\mathbb{V}(\mathrm{T}_n)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(x^{\mathrm{T}_n})$ pour $x > 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(x^{\mathrm{T}_n})$.

Exercice 7 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(1/2)$. On pose $\mathrm{T}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(2\mathrm{X}_i - 1)$ pour $n \geqslant 1$.

1. Rappeler la propriété de continuité décroissante pour une suite d'événements.
2. Montrer $$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{E}(n^4 \mathrm{T}_n^4) = 3n^2 - 2n$$
3. Montrer $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \quad \text{p.s.}$$

Exercice 8 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $(\mathrm{X}_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier. On appelle *marche aléatoire* la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$.

1. Pour $n \geqslant 1$, préciser $\prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i(\Omega)$ et la loi du n-uplet $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$. Déterminer une expression sous forme de somme pour $$\mathrm{T}_n(f) = \mathbb{E}(f(\mathrm{S}_n))$$
3. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en déduire la relation de récurrence $$\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{T}_n(f) = \mathrm{T}_{n-1}(g) \quad \text{avec} \quad g : x \mapsto \frac{f(x+1) + f(x-1)}{2}$$
4. Établir la monotonie de la suite $(\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|))_{n\geqslant 1}$.
5. Comparer les suites $(\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|))_{n\geqslant 1}$ et $(\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$.
6. Déterminer la loi de S_n pour n entier non nul.
7. Montrer que la marche aléatoire repasse une infinité de fois presque sûrement par zéro.