Feuille d'exercices n°63

Exercice 1 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et $\mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_n + \mathrm{X}_{n+1} + \mathrm{X}_{n+2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k - 3p\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Indications : Comparer les événements $\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k - 3p\right| \geqslant \varepsilon\right\}$ et $\bigcup_{\ell=0}^{2} \left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_{k+\ell} - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\}$.

Exercice 2 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire de loi $\mathscr{U}_{[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]}$ avec n entier. On suppose n non premier avec $n = ab$ et a, b des entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Montrer qu'il existe un unique couple de variables aléatoires (Q, R) à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{X} = a\mathrm{Q} + \mathrm{R}$ avec $\mathrm{R}(\Omega) \subset [\![\,0\,;\,a-1\,]\!]$.
2. Préciser la loi de (Q, R) puis de Q et de R.
3. En déduire qu'il existe Y et Z, variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont on précisera les lois telles que $\mathrm{X} \sim \mathrm{Y} + \mathrm{Z}$.

Indications : 1. Considérer l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times [\![\,0\,;\,a-1\,]\!], x \mapsto (q, r)$ où q et r désignent respectivement quotient et reste de la division euclidienne de x par a.
2. Utiliser le caractère bijectif de φ.
3. Utiliser la décomposition $\mathrm{X} = a\mathrm{Q} + \mathrm{R}$.

Exercice 3 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(x)$ avec $x \in [\,0\,;1\,]$. Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Pour n entier non nul, on note $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ et on pose

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{B}_n(f)(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right]$$

1. Préciser la loi de S_n puis déterminer une expression sommatoire de $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right]$.
2. Si x est un point de continuité de f, montrer

$$\mathrm{B}_n(f)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

Indications : 2. On pourra considérer $\mathrm{A}_n = \left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right| > \eta\right\}$ avec $\eta > 0$ bien choisi.

Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y indépendantes de loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1\,;\, n]\!])$. Calculer $\mathbb{E}(\text{Card X})$ puis $\mathbb{E}(\text{Card X} \cap \text{Y})$.

Indications : Remarquer que les cas favorables à l'événement $\{\text{Card X} = k\}$ correspondent à choisir une partie de $[\![1\,;\, n]\!]$ à k éléments puis considérer $\text{U} \sim \mathscr{B}(n, 1/2)$. Remarquer ensuite que les cas favorables à l'événement à $\{\text{Card X} \cap \text{Y} = k\}$ correspondent à choisir deux parties A et B de $[\![1\,;\, n]\!]$ dont l'intersection contient k éléments. Pour compter ces cas favorables, choisir les k éléments de $\text{A} \cap \text{B}$ puis les éléments de $\text{A} \setminus (\text{A} \cap \text{B})$ puis les éléments de $\text{B} \setminus (\text{A} \cap \text{B})$. Considérer enfin $\text{V} \sim \mathscr{B}(n, 1/4)$.

Exercice 5 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y des variables aléatoires réelles discrètes à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$.

1. Justifier que X et Y admettent des moments à tout ordre, c'est-à-dire X^k et Y^k d'espérance finie pour tout k entier.

2. On suppose
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}(\text{X}^k) = \mathbb{E}(\text{Y}^k)$$
Montrer que X et Y ont même loi.

Indications : 2. Établir $\mathbb{E}(f(\text{X})) = \mathbb{E}(f(\text{Y}))$ pour f polynomiale puis pour $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$. Pour $x_0 \in [\,a\,;b\,]$ et $\delta = \max(x_0 - a, b - x_0)$, choisir $f : [\,a\,;b\,] \times \,]\,0\,;\delta\,[\to \mathbb{R}$ telle que $f(\cdot, \varepsilon)$ est continue pour $\varepsilon \in \,]\,0\,;\delta\,[$ et vérifiant $f(\cdot, \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \mathbb{1}_{\{x_0\}}$ puis conclure.

Exercice 6 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![-1\,;\, 1]\!]$. On pose
$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) = \sqrt{1 - t^2}$$
et
$$\forall n \geqslant 1 \qquad \text{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad \text{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \times (1 + \varepsilon_k)$$

1. Justifier que la suite $(\text{I}_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers une limite ℓ que l'on précisera.

2. Établir
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|\text{X}_n - \ell| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

3. En déduire
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|\tan(\text{X}_n) - 1| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

4. Montrer $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{M} > 0 \quad | \quad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(\sqrt{n}\,|\text{X}_n - \ell| \leqslant \text{M}) \geqslant 1 - \varepsilon$

Indications : 2. Poser $\Delta_n = \text{I}_n - \ell$ pour n entier non nul puis exprimer $\mathbb{E}\left((\text{X}_n - \ell)^2\right)$ à l'aide de Δ_n et en déduire son comportement asymptotique.
3. Quantifier la continuité de la fonction tan en ℓ puis écrire sa contraposée.
4. Décomposer $\Delta_n = \text{S}_n + \displaystyle\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\text{d}t$ avec $\text{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right)\,\text{d}t$ puis montrer $\Delta_n = \text{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et conclure.