ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°32

Exercice 1 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ son graphe.

1. Montrer que si f est continue, alors Γ_f est fermé.
2. Montrer que si f est bornée et Γ_f fermé, alors f est continue.
3. Le résultat précédent a-t-il lieu sans l'hypothèse f bornée ?

Corrigé : 1. Soit $(x_n, f(x_n))_n$ une suite à valeurs dans Γ_f telle que $(x_n, f(x_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y)$. En particulier, on a $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et par continuité de f

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

d'où $y = f(x)$ par unicité de la limite ce qui prouve $(x, y) \in \Gamma_f$. Par caractérisation séquentielle, on conclut

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est continue, alors } \Gamma_f \text{ est fermé.}}$$

Variante : On peut considérer $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y - f(x)$ et observer $\Gamma_f = g^{-1}(\{0\})$.

2. Soit $(x_n)_n$ suite réelle telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ avec x réel. Soit φ une extractrice telle que $\left(f(x_{\varphi(n)})\right)_n$ converge (il en existe d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass puisque f est bornée). Il s'ensuit que $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}))_n$ est une suite convergente à valeurs dans Γ_f. Par fermeture du graphe, on en déduit

$$(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, f(x))$$

Ainsi, la suite $\left(f(x_n)\right)_n$ admet $f(x)$ comme unique valeur d'adhérence et comme c'est une suite bornée dans un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie (de dimension 1 !), il s'ensuit

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

On conclut $\boxed{\text{Si } f \text{ est bornée et } \Gamma_f \text{ fermé, alors } f \text{ est continue.}}$

3. Le résultat est faux. On peut considérer $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ par exemple. Notant $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$, on a $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ car polynomiale et

$$\Gamma_f = \varphi^{-1}(\{1\}) \cup \{(0, 0)\}$$

Ainsi $\boxed{\text{On peut trouver } f \text{ non bornée, discontinue telle que } \Gamma_f \text{ soit fermé.}}$

Exercice 2 (***)

Soit $f :]\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.

Corrigé : Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $\eta \in]\,0\,;1\,]$ tel que

$$\forall (x,y) \in \left]\,0\,;1\,\right]^2 \qquad |x-y| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $(x_n)_n$ à valeurs dans $]\,0\,;1\,]$ de limite nulle. Pour n assez grand, on a $x_n \leqslant \eta$ d'où

$$|f(x_n)| \leqslant |f(\eta)| + \varepsilon$$

ce qui prouve que la suite $(f(x_n))_n$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose de φ extractrice et ℓ réel tels que

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

Soit $(y_n)_n$ une suite à valeurs dans $]\,0\,;1\,]$ de limite nulle. Pour n assez grand, on a $\left|y_n - x_{\varphi(n)}\right| \leqslant \eta$ d'où

$$|f(y_n) - \ell| \leqslant \left|f(y_n) - f(x_{\varphi(n)})\right| + \left|f(x_{\varphi(n)}) - \ell\right| \leqslant 2\varepsilon$$

ce qui prouve, par caractérisation séquentielle, que la fonction f admet une limite finie en 0. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un prolongement par continuité en } 0.}$$

Exercice 3 (***)

Soit $(u_n)_n$ suite réelle bornée telle que $u_n + \dfrac{1}{2}u_{n+1} = a_n$ avec $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Corrigé : D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ tel que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Par suite

$$u_{\varphi(n)+1} = 2a_{\varphi(n)} - 2u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2a - 2\ell$$

Considérons la suite $(v_n)_n$ définie par $v_0 = \ell$ et $v_{n+1} = 2a - 2v_n$. Il s'agit d'une suite de valeurs d'adhérences de $(u_n)_n$ d'après le résultat précédent. La suite $(v_n)_n$ est arithmético-géométrique.

Son point fixe α vérifie $\qquad \alpha = 2a - 2\alpha \iff \alpha = \dfrac{2a}{3}$

La suite $(v_n - \alpha)_n$ est géométrique de raison -2 et on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = (-2)^n\left(\ell - \frac{2a}{3}\right) + \frac{2a}{3}$$

Comme la suite $(u_n)_n$ est bornée, l'ensemble de ses valeurs d'adhérences l'est aussi et d'après l'expression ci-dessus, il s'ensuit que $\ell = \dfrac{2a}{3}$. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est une suite réelle bornée avec une unique valeur d'adhérence. On conclut

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2a}{3}}$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et F un sev de dimension finie de E. Montrer

$$\forall x \in \mathrm{E} \quad \exists y \in \mathrm{F} \quad | \quad \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) = \|x-y\|$$

Corrigé : Soit $x \in \mathrm{E}$. Par caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe $(y_n)_n \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\|x-y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{d}(x,\mathrm{F})$$

Par inégalité triangulaire $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|y_n\| \leqslant \|y_n - x\| + \|x\|$

La suite $(\|y_n - x\|)_n$ est convergente donc bornée et par conséquent, la suite $(y_n)_n$ est bornée. Ainsi, il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que $(y_n)_n$ est à valeurs dans $\mathrm{K} = \mathrm{B}_f(0,\mathrm{M}) \cap \mathrm{F}$. Or, cet ensemble est un fermé borné de F espace de dimension finie et par conséquent K est un compact de F. Puis, il existe φ extractrice telle que $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in \mathrm{K} \subset \mathrm{F}$ et

$$\|y_{\varphi(n)} - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|y-x\| = \mathrm{d}(x,\mathrm{F})$$

On conclut $\qquad \boxed{\forall x \in \mathrm{E} \quad \exists y \in \mathrm{F} \quad | \quad \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) = \|x-y\|}$

Variante : Soit $x \in \mathrm{E}$ et $a \in \mathrm{F}$. On pose $\mathrm{K} = \mathrm{B}_f(x, \|a-x\|) \cap \mathrm{F}$. Cet ensemble est un fermé borné de F espace de dimension finie et par conséquent K est un compact de F. D'après le théorème des bornes atteintes appliqué à la fonction 1-lipschitzienne $\mathrm{d}(x,\cdot)$, il existe $y \in \mathrm{K}$ tel que

$$\mathrm{d}(x,y) = \operatorname*{Inf}_{z\in\mathrm{K}} \mathrm{d}(x,z) = \mathrm{d}(x,\mathrm{K})$$

Ainsi, on a

$$\forall z \in \mathrm{K} \qquad \mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathrm{F} \smallsetminus \mathrm{K} \qquad \mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,a) < \mathrm{d}(x,z)$$

ce qui prouve $\qquad \mathrm{d}(x,y) = \operatorname*{Inf}_{z\in\mathrm{F}} \mathrm{d}(x,z) = \mathrm{d}(x,\mathrm{F})$

Exercice 5 (***)

Soit E un evn, X une partie compacte non vide de E et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{X}^2 \quad \text{avec} \quad x \neq y \qquad \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\|$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe α (considérer $\operatorname*{Inf}_{x\in\mathrm{X}} \|x - f(x)\|$).
2. Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathrm{X}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que $(u_n)_n$ converge vers α.

Corrigé : 1. L'unicité est immédiate. L'application f est 1-lispchitzienne donc continue. Comme $x \mapsto \|x - f(x)\|$ est continue car composée de telles fonctions, elle atteint sa borne inférieure sur le compact X. Il existe donc $\alpha \in \mathrm{X}$ tel que $\operatorname*{Inf}_{x\in\mathrm{X}} \|x - f(x)\| = \|\alpha - f(\alpha)\|$. Supposons $\alpha \neq f(\alpha)$. Il vient alors

$$\|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\| < \|\alpha - f(\alpha)\|$$

ce qui est absurde par choix de α. On en déduit

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un unique point fixe } \alpha \in \mathrm{X}.}$$

2. La suite $(\|u_n - \alpha\|)_n$ est décroissante, positive donc convergente par limite monotone. Notons ℓ sa limite. Par compacité de X, il existe une extractrice φ tel que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} u \in \mathrm{X}$. On a aussi $f(u_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(u)$ par continuité de f. Ainsi

$$\|u_{\varphi(n)} - \alpha\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|u-\alpha\| = \ell \quad \text{et} \quad \|u_{\varphi(n)+1} - \alpha\| = \|f(u_{\varphi(n)}) - \alpha\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f(u) - \alpha\| = \ell$$

Si $u \neq \alpha$, on aurait $\|f(u) - \alpha\| < \|u - \alpha\|$ ce qui est absurde. On en déduit $f(u) = u$ d'où $u = \alpha$ et donc $\ell = 0$. Ainsi

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha}$$

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, K un compact convexe non vide et $f : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ une application 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe.

Corrigé : Soit $a \in \mathrm{K}$. On pose

$$\forall (x,n) \in \mathrm{K} \times \mathbb{N}^* \qquad f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) + \frac{a}{n}$$

Soit n entier non nul. Par convexité de K, l'application f_n est à valeurs dans K. Par ailleurs, on a

$$\forall (x,y) \in \mathrm{K}^2 \qquad \|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f(x) - f(y)\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\|$$

Ainsi, l'application f_n est k_n-lipschitzienne avec $k_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. L'application $g_n : x \mapsto \|f_n(x) - x\|$ est continue et atteint donc son minimum sur le compact K en un point x_n. Puis, on a

$$g_n(x_n) \leqslant g_n(f_n(x_n)) = \|f_n(f_n(x_n)) - f_n(x_n)\| \leqslant k_n g_n(x_n) \quad \text{avec} \quad k_n < 1$$

On en déduit $g_n(x_n) = 0$, autrement dit x_n est point fixe de f_n. La suite $(x_n)_n$ ainsi construite est à valeurs dans le compact K. Il existe donc une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$. Enfin, on a

$$f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)} \iff \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right) f(x_{\varphi(n)}) + \frac{a}{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)}$$

Par continuité de f, on obtient $f(x) = x$ en passant à la limite. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ admet un point fixe.}}$$

Exercice 7 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il y a équivalence entre

1. L'image réciproque par f de tout compact de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$

Corrigé : Supposons 1. Ainsi

$$\forall \mathrm{A} > 0 \qquad \exists \mathrm{B} > 0 \quad | \quad f^{-1}([-\mathrm{A}\,;\mathrm{A}]) \subset [-\mathrm{B}\,;\mathrm{B}]$$

D'où par complémentarité

$$\forall \mathrm{A} > 0 \qquad \exists \mathrm{B} > 0 \quad | \quad \mathbb{R} \smallsetminus [-\mathrm{B}\,;\mathrm{B}] \subset \mathbb{R} \smallsetminus f^{-1}([-\mathrm{A}\,;\mathrm{A}]) = f^{-1}(\mathbb{R} \smallsetminus [-\mathrm{A}\,;\mathrm{A}])$$

ce qui signifie exactement $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$

Réciproquement, supposons ce qui précède. Soit K compact de $\mathbb{R}$. On sait que $f^{-1}(\mathrm{K})$ est un fermé. Supposons $f^{-1}(\mathrm{K})$ non borné. Donc il existe $(x_n)_n$ à valeurs dans $f^{-1}(\mathrm{K}) \smallsetminus [-n\,;n]$ d'où $|x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ puis quitte à extraire $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ ou $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ et par suite $|f(x_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Or, la suite $(f(x_n))_n$ est à valeurs dans K et est donc bornée. On conclut que $f^{-1}(\mathrm{K})$ est borné et on a donc établi

$$\boxed{(1) \iff (2)}$$

Exercice 8 (***)

1. Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que 1 est valeur d'adhérence de la suite $(z^n)_n$.
2. Soit $(z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{U}^p$. Montrer que p est valeur d'adhérence de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{p} z_k^n\right)_n$.

Corrigé : 1. La suite $(z^n)_n$ est à valeurs dans le compact $\mathbb{U}$ en tant que fermé borné de $\mathbb{C}$. On dispose de φ extractrice telle que

$$z^{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{avec} \quad \theta \text{ réel}$$

On pose définit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\psi(0) = \varphi(0)$ puis $\psi(n+1) = \varphi(2\psi(n)+1)$ pour n entier. Avec ce choix, on observe

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \psi(n+2) - \psi(n+1) - (\psi(n+1) - \psi(n)) = \underbrace{\psi(n+2) - 2\psi(n+1)}_{\geqslant 1} + \psi(n) > \psi(n)$$

Ainsi, la suite $(\psi(n+1) - \psi(n))_n$ est une extractrice vérifiant $\psi(n+1) - \psi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ avec $(\psi(n))_n$ sous-suite $(\varphi(n))_n$. Il vient

$$z^{\psi(n+1)-\psi(n)} = z^{\psi(n+1)}\overline{z^{\psi}(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 1$$

On conclut $\boxed{\text{La suite } (z^n)_n \text{ admet 1 comme valeur d'adhérence.}}$

2. La suite $(z_1^n, \ldots, z_s^n)_n$ est à valeurs dans $\mathbb{U}^s$, compact comme produit fini de compacts. On dispose donc φ extractrice telle que

$$\forall k \in [\![1\,;\, s]\!] \qquad z_k^{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k} \quad \text{avec} \quad \theta_k \text{ réel}$$

En procédant comme à la question 3.(a), on construit une extractrice ψ, définie uniquement à partir de φ, telle que $\chi = \psi(\cdot + 1) - \psi$ est une extractrice et vérifiant

$$\forall k \in [\![1\,;\, s]\!] \qquad z_k^{\chi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Exercice 9 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie et U un ouvert de E. Montrer que U peut s'écrire comme une union croissante de compacts.

Corrigé : On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{K}_n = \mathrm{B}_f(0,n) \cap \left\{x \in \mathrm{E} \mid \mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$$

La suite $(\mathrm{K}_n)_{n\geqslant 1}$ est clairement croissante pour l'inclusion. Pour n entier non nul, on a

$$\mathrm{K}_n = \mathrm{B}_f(0,n) \cap \mathrm{d}(\cdot, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U})^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}\,;\, +\infty\right[\right)$$

L'application $\mathrm{d}(\cdot, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U})$ est continue car 1-lipschitzienne d'où la fermeture de K_n comme intersection d'une boule fermée avec l'image réciproque d'un fermé par une application continue. L'ensemble K_n est un fermé borné de E de dimension finie ce qui prouve sa compacité. L'ensemble $\mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}$ est fermé d'où

$$x \notin \mathrm{U} \iff \mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}) = 0$$

et par négation

$$x \in \mathrm{U} \iff \mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}) > 0$$

On en déduit $\mathrm{K}_n \subset \mathrm{U}$ puis $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{K}_n \subset \mathrm{U}$. Soit $x \in \mathrm{U}$. Comme $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe un seuil N_1 entier non nul tel que $\dfrac{1}{n} \leqslant \mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U})$ pour $n \leqslant \mathrm{N}_1$ et comme $n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, il existe un seuil N_2 tel que $\|x\| \leqslant n$ pour $n \geqslant \mathrm{N}_2$. Ainsi, il existe n entier non nul que l'on peut choisir $n = \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$ tel que $x \in \mathrm{K}_n$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{U} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{K}_n \text{ avec } (\mathrm{K}_n)_{n\geqslant 1} \text{ une suite croissante de compacts}}$$

Exercice 10 (***)

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Corrigé : Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{T} = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ soit triangulaire supérieure. Pour $j \in [\![1\,;\, n]\!]$, on note $t_{j,j} = r_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}$. On pose

$$\forall u \in [\,0\,;1\,] \quad \varphi(u) = \mathrm{PS}(u)\mathrm{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{S}(u) = \big(s_{i,j}(u)\big)_{(i,j)} \quad \text{et} \quad s_{i,j}(u) = \begin{cases} u t_{i,j} & \text{si } i < j \\ r_j^u \mathrm{e}^{\mathrm{i}u\theta_j} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application φ ainsi définie est continue, à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ puisque $|\det \varphi(u)| = \prod_{i=1}^{n} r_i^u > 0$ et telle que $\varphi(1) = \mathrm{M}$ et $\varphi(0) = \mathrm{I}_n$. Ainsi, toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est relié continûment à I_n par un chemin à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Par transitivité et symétrie, toutes les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont continûment reliées entre elles par un chemin dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ est connexe par arcs.}}$$

Exercice 11 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $f \in \mathscr{C}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ telle que $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que f admet un minimum global.

Corrigé : Il existe $\mathrm{R} > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x\| > \mathrm{R} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(0)$$

L'ensemble $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$ est compact car fermé borné dans un espace de dimension finie et la fonction continue f atteint ses bornes sur $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$. En particulier, on a

$$f(0) \geqslant \operatorname*{Min}_{x\in \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} f(x)$$

Soit $x \in \mathrm{E}$. Si $\|x\| > \mathrm{R}$, on a

$$f(x) \geqslant f(0) \geqslant \operatorname*{Min}_{x\in \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} f(x)$$

et si $\|x\| \leqslant \mathrm{R}$ ce qui signifie $x \in \mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$, alors $f(x) \geqslant \operatorname*{Min}_{x\in \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} f(x)$. Par conséquent, le minimum atteint sur $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$ est global et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un minimum global.}}$$

Exercice 12 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, K un compact convexe non vide et $u \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E})$ tel que $u(\mathrm{K}) \subset \mathrm{K}$. On note $\mathrm{C} = (\mathrm{id} - u)(\mathrm{K})$ puis on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k \quad \text{et} \quad x_n = (\mathrm{id} - u) \circ u_n(a) \quad \text{avec} \quad a \in \mathrm{K}$$

1. Montrer que C est un compact.
2. Montrer que $(x_n)_n \in \mathrm{C}^{\mathbb{N}}$ puis $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. En déduire que u admet un point fixe dans K.

Corrigé : 1. On a $\mathrm{id} - u$ continue et $\mathrm{C} = (\mathrm{id} - u)(\mathrm{K})$ est l'image directe d'un compact par une application continue donc

$$\boxed{\text{L'ensemble C est compact.}}$$

2. Par récurrence immédiate, on a $u^k(\mathrm{K}) \subset \mathrm{K}$ pour tout k entier. Par convexité de K, on a

$$\forall n \in \mathrm{K} \times \mathbb{N}^* \qquad u_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(a) \in \mathrm{K}$$

Par conséquent, on a $x_n \in (\mathrm{id} - u)(\mathrm{K})$ pour tout n entier. Puis, par téléscopage,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left[u^k(a) - u^{k+1}(a)\right] = \frac{1}{n}\left[a - u^n(a)\right]$$

L'ensemble K est compact donc borné et par conséquent, il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|x_n\| \leqslant \frac{1}{n}\left(\|a\| + \|u^n(a)\|\right) \leqslant \frac{2\mathrm{M}}{n}$$

On conclut
$$\boxed{(x_n)_n \in \mathrm{C}^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

3. L'ensemble C est compact donc fermé. Or, on a construit une suite à valeurs dans C convergente de limite nulle. Par fermeture de C, on en déduit

$$0 \in \mathrm{C} = (\mathrm{id} - u)(\mathrm{K})$$

Autrement dit
$$\boxed{\exists x \in \mathrm{K} \quad | \quad u(x) = x}$$

Remarque : Il s'agit du *théorème de Markov-Kakutani.*

Exercice 13 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn.

1. Soit $(x_n)_n$ suite à valeurs dans E pour laquelle il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad n \neq p \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$$

   Montrer que $(x_n)_n$ n'admet aucune sous-suite convergente.

2. Soit K un compact de E. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p non nul et $x_1, \ldots, x_p$ dans E tels que

$$\mathrm{K} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$$

Corrigé : 1. Supposons qu'il existe φ extractrice telle que $x_{\varphi}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. On a

$$\varepsilon \leqslant \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leqslant \|x_{\varphi(n+1)} - \ell\| + \|\ell - x_{\varphi(n)}\| = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi $\boxed{\text{La suite } (x_n)_n \text{ n'admet aucune sous-suite convergente.}}$

2. On procède par l'absurde : supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout p entier non nul et tous $a_1, \ldots, a_p$ dans E, on ait $\mathrm{K} \not\subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(a_i, \varepsilon)$. On va alors construire une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans K vérifiant les contraintes de la première question. Soit $a_1 \in \mathrm{E}$. On a $\mathrm{K} \not\subset \mathrm{B}(a_1, \varepsilon)$ donc il existe $x_1 \in \mathrm{K} \setminus \mathrm{B}(a_1, \varepsilon)$ (l'hypothèse garantit la non-vacuité de K). On suppose avoir construit $x_1, \ldots, x_n$ à valeurs dans K avec $\|x_i - x_j\| \geqslant \varepsilon$ pour $(i, j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ et $i \neq j$. Par hypothèse, on a $\mathrm{K} \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ donc il existe $x_{n+1} \in \mathrm{K} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$. Par construction, on a donc $x_{n+1} \in \mathrm{K}$ et

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \|x_i - x_{n+1}\| \geqslant \varepsilon$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi construite est à valeurs dans K et vérifie les conditions de la première question. Il s'agit donc d'une suite à valeurs dans K compact et sans sous-suite convergente, ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists p \in \mathbb{N}^* \quad \exists (x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{E}^p \quad | \quad \mathrm{K} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)}$$

Exercice 14 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que si la sphère unité $\mathrm{S}(0, 1)$ est compacte, alors E est de dimension finie.

Corrigé : Supposons E de dimension infinie. Soit x_0 vecteur normé. On construit par récurrence une suite $(x_n)_n$ de vecteurs normés vérifiant $\|x_n - x_p\| \geqslant 1$ pour $n \neq p$. Supposons $(x_0, \ldots, x_n)$ construit et posons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x_0, \ldots, x_n)$. Comme E n'est pas de dimension finie, il existe $a \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$. D'après le résultat établi dans un autre exercice, on dispose de $b \in \mathrm{F}$ tel que $\mathrm{d}(a, \mathrm{F}) = \|a - b\|$. On pose alors

$$x_{n+1} = \frac{a - b}{\|a - b\|}$$

Par ailleurs, on a $\qquad \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}(\lambda x, \mathrm{F}) = |\lambda|\, \mathrm{d}(x, \mathrm{F})$

Si $\lambda = 0$ c'est trivial. Sinon, pour $\lambda \neq 0$, on a pour $y \in \mathrm{F}$

$$\|\lambda x - y\| = |\lambda|\, \|x - y/\lambda\| \geqslant |\lambda|\, \mathrm{d}(x, \mathrm{F})$$

d'où
$$\mathrm{d}(\lambda x, \mathrm{F}) \geqslant |\lambda|\, \mathrm{d}(x, \mathrm{F})$$

et
$$\mathrm{d}(x, \mathrm{F}) = \mathrm{d}(\lambda x/\lambda, \mathrm{F}) \geqslant \frac{1}{|\lambda|} \mathrm{d}(\lambda x, \mathrm{F})$$

d'où l'égalité. Par suite

$$\mathrm{d}(x_{n+1}, \mathrm{F}) = \frac{1}{\|a - b\|} \mathrm{d}(a - b, \mathrm{F}) = \frac{1}{\|a - b\|} \operatorname*{Inf}_{y\in\mathrm{F}} \|a - (b + y)\| = \frac{\mathrm{d}(a, \mathrm{F})}{\|a - b\|} = 1$$

puisque $y \mapsto b + y$ est une permutation de F. Ainsi, on a

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \|x_{n+1} - x_k\| \geqslant \mathrm{d}(x_{n+1}, \mathrm{F}) = 1$$

et par construction, le vecteur x_{n+1} est unitaire. Supposons que la suite $(x_n)_n$ ainsi construite possède une valeur d'adhérence. Alors, il existe φ extractrice telle $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Puis, par inégalité triangulaire

$$1 \leqslant \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leqslant \|x_{\varphi(n+1)} - x\| + \|x - x_{\varphi(n)}\| = \mathrm{o}(1)$$

ce qui est absurde. La suite $(x_n)_n$ ainsi construite est à valeurs dans $\mathrm{S}(0, 1)$ et n'admet pas de valeur d'adhérence. On conclut par contraposée

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{S}(0, 1) \text{ est compacte, alors l'espace E est de dimension finie.}}$$

Remarque : Ce résultat s'intitule le *théorème de Riesz*. La preuve vaut aussi pour $\mathrm{B}_f(0, 1)$. On en déduit que les compacts en dimension infinie sont d'intérieur vide. En effet, sinon on pourrait trouver une boule ouverte incluse dans un compact et cette boule ouverte contiendrait une boule fermée qui serait fermée dans un compact donc compacte ce qui est absurde dans un espace de dimension infinie.