

Préparation à l'interrogation n°16

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\sqrt{1+x}$

2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

3. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$1 - \cos(t)^n = 1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{nt^2}{2} + o(t^2)\right) = \frac{nt^2}{2} + o(t^2)$$

4. $\operatorname{ch}^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = e^{n \ln\left(1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{\frac{t^2}{2} + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\frac{t^2}{2}}$

2 Trigonométrie

Linéariser :

1. $\cos(a)\cos(b)$;

2. $\sin(a)\cos(b)$.

3 Calcul intégral

1. $\int \frac{dt}{t^\alpha}$ avec $\alpha \neq 1$;

2. $\int \frac{dt}{1-t^2}$;

3. $\int \frac{dt}{a^2+t^2}$ avec $a \neq 0$;

4 Exercices types

1. La norme subordonnée est une norme sous-multiplicative (voir [Topologie, continuité]) ;

2. Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (voir [Topologie, continuité]) ;

3. $GL_n(\mathbb{K})$ ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (voir [Topologie, continuité]) ;

4. Fermeture de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (dans Feuille 59 exercice 9).

5 Exercice type

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} , indépendantes et de même loi. Déterminer la loi de $U = \max(X_1, \dots, X_n)$ en fonction de $F = F_{X_1}$ (fonction de répartition de X_1).

Corrigé : On a $U(\Omega) \subset \mathbb{N}$ puis pour k entier

$$\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(\{U \leq k\} \setminus \{U \leq k-1\}) = \mathbb{P}(U \leq k) - \mathbb{P}(U \leq k-1)$$

Par indépendance $\mathbb{P}(U \leq k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq k\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq k) = F(k)^n$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(U = k) = F(k)^n - F(k-1)^n}$$

6 Exercice type

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et X_1, \dots, X_n variables aléatoires indépendantes avec $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ et les $\lambda_i > 0$. Déterminer la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$.

Corrigé : On a $G_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(t-1)}$ pour $t \in [0; 1]$ et $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Par indépendance des X_i , notant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, il vient

$$\forall t \in [0; 1] \quad G_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-1)} = \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(t-1)\right)$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que

$$\boxed{S_n \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)}$$

7 Exercice type

Soit n entier. Déterminer le reste de la division euclidienne X^n par $(X - a)^2$ avec a réel.

Corrigé : D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^n = (X - a)^2 Q + R \quad (*)$$

Notant $S = (X - a)^2 Q$, on observe que S admet a pour racine double d'où $S(a) = S'(a) = 0$. En substituant X par a dans $(*)$ puis dans la relation obtenue par dérivation de $(*)$, on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta \\ na^{n-1} = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = na^{n-1} \\ \beta = (1 - n)a^n \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Si } a = b, \text{ on a } R = na^{n-1}X + (1 - n)a^n}$$

Variante : Avec la formule de Taylor, on a

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k = R + (X - a)^2 Q \quad \text{et} \quad R = P(a) + P'(a)(X - a)$$

Pour $P = X^n$ spécifiquement, on peut développer un binôme

$$X^n = (X - a + a)^n = a^n + na^{n-1}(X - a) + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a^{n-k}(X - a)^k$$

8 Questions de cours

Équations différentielles (début), développements en série entière usuels, graphes usuels.