# Devoir en temps libre n°13

## Problème I

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(1/2)$. On note $\mathrm{Y}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\mathrm{X}_k}{2^k}$ pour $n$ entier non nul.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \in [\,0\,;1\,]) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n)$ puis étudier son comportement asymptotique pour $n \to +\infty$.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_n, \mathrm{Y}_m)$ pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Les variables $(\mathrm{Y}_n)_{n\geqslant 1}$ sont-elles indépendantes ?

## Problème II

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![\,0\,;\,2\mathrm{N}\,]\!]$ avec N entier non nul. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour $n$ entier.

1. Justifier que $\mathrm{X}_1$ est d'espérance finie et calculer $m = \mathbb{E}(\mathrm{X}_1)$.
2. Soit $t > 0$. Justifier l'égalité
$$\left\{\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right\} = \left\{\mathrm{e}^{\,t(\mathrm{S}_n - n\mathrm{N})} \geqslant \mathrm{e}^{\,\frac{t\mathrm{N}n}{2}}\right\}$$
3. En déduire $$\forall t > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\,n\varphi(t)}$$
avec $$\varphi(t) = -\frac{\mathrm{N}t}{2} + \ln\left(\frac{\mathrm{sh}\,((\mathrm{N}+1/2)t)}{\mathrm{sh}\,(t/2)}\right) - \ln(2\mathrm{N}+1)$$
4. Déterminer un développement limité de $\varphi$ en 0 à l'ordre 1.
5. Conclure qu'il existe $r \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que
$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right) \leqslant r^n$$

# Problème III

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi avec $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = -1) = 1 - p$ et $p \in \,]\,0\,;1\,[$. Pour $n$ entier, on note $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$ avec la convention $\mathrm{S}_0 = 0$ et $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0)$. On pose

$$\mathrm{T} = \operatorname{Inf} \{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{S}_n = 0\}$$

avec la convention $\operatorname{Inf} \varnothing = +\infty$. On note $q_n = \mathbb{P}(\mathrm{T} = n)$ pour $n$ entier non nul et $q_0 = 0$.

1. Soit $n$ entier non nul. Déterminer la loi de $\mathrm{S}_n$. On pourra poser $\mathrm{Y}_k = \dfrac{1 + \mathrm{X}_k}{2}$ pour tout $k$ entier nul nul.

2. Établir $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad p_{2n} = \sum_{k=0}^{n} q_{2k}\, p_{2(n-k)}$$

3. Justifier que les séries entières $\sum p_n t^n$ et $\sum q_n t^n$ admettent des rayons de convergence $\geqslant 1$. On note respectivement $f$ et $g$ leurs sommes sur $]-1\,;1\,[$.

4. Montrer $$\forall t \in \,]-1\,;1\,[ \qquad f(t) = 1 + f(t)g(t)$$

5. Déterminer le développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ sur $]-1\,;1\,[$. Les coefficients du développement devront être exprimés en fonction du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ avec $n$ entier.

6. En déduire une expression de $f(t)$ pour $t \in \,]-1\,;1\,[$ puis une expression de $q_n$ pour $n$ entier non nul.