ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°64

Exercice 1 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X variable aléatoire de loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Justifier que $\dfrac{1}{\mathrm{X}+1}$ admet une espérance finie puis la calculer.

Exercice 2 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires dans L^2. On note la matrice des covariances $\Sigma = \big(\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer

$$\Sigma \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$$

Exercice 3 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ variables aléatoires indépendantes avec $\mathrm{X}_i \sim \mathscr{P}(\lambda_i)$ et les $\lambda_i > 0$. Déterminer, de deux manières différentes, la loi de $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$.

Exercice 4 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle telle que X et $f(\mathrm{X})$ sont dans L^1. Montrer

$$f(\mathbb{E}(\mathrm{X})) \leqslant \mathbb{E}(f(\mathrm{X}))$$

Exercice 5 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y des variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs p et q dans $]\,0\,;1\,[$. On note A la matrice aléatoire réelle définie par

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{A}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{X}(\omega) & 1 \\ 0 & \mathrm{Y}(\omega) \end{pmatrix}$$

Déterminer
$$\mathbb{P}(\mathrm{A} \text{ diagonalisable})$$

Exercice 6 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et $\mathrm{Y}_n = \min(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ pour tout n entier non nul.

1. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > k)$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
2. En déduire que pour n entier non nul, la variable aléatoire Y_n suit une loi usuelle dont on précisera le paramètre.

Exercice 7 (**)

Soit X variable aléatoire de L^2, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2) \neq 0$.

1. Établir
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \neq 0) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{X})$$

2. Établir
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\mathbb{V}(\mathrm{X}) + \mathbb{E}(\mathrm{X})^2}$$

Exercice 8 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes d'espérance finie égale à μ. On pose
$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{M}(\omega) = \big(\mathrm{X}_{i,j}(\omega)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$
Soit λ réel. Justifier que $\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)$ est une variable aléatoire réelle discrète d'espérance finie puis calculer $\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{M}}(\lambda))$.

Exercice 9 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, n un entier non nul et $(\mathrm{X}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Pour $i \in [\![1 \,; n]\!]$, on pose $\mathrm{Y}_i = \mathbb{1}_{\{\mathrm{X}_i = 0\}}$ puis on note
$$\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i$$

1. Préciser la loi des Y_i puis déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{U}_n)$ et $\mathbb{V}(\mathrm{U}_n)$.
2. Établir
$$\mathbb{V}(\mathrm{U}_n) \leqslant \frac{1}{4n}$$
3. On définit φ sur $\mathbb{N}$ par
$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad \varphi(j) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = 0 | \mathrm{S}_n = j)$$
Déterminer une expression de $\varphi(j)$ pour $j \in \mathbb{N}$.
4. On pose $\mathrm{V}_n = \varphi(\mathrm{S}_n)$. Montrer que $\mathrm{V}_n \in \mathrm{L}^2$.
5. Déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{V}_n)$ et Comparer $\mathbb{V}(\mathrm{V}_n)$ à $\mathbb{V}(\mathrm{U}_n)$.

Exercice 10 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\varepsilon_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires dans L^2 avec $\mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0$ et $\mathbb{V}(\varepsilon_k) = \sigma^2$ pour k entier non nul.

1. Les variables $(\varepsilon_k)_{k \geqslant 1}$ ne sont pas forcément indépendantes mais vérifient $\varepsilon_i \perp\!\!\!\perp \varepsilon_j$ si $|i - j| > 1$ avec i, j entiers non nuls. Établir
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \right| \geqslant \varepsilon \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$
2. Généraliser ce résultat si les variables $(\varepsilon_k)_{k \geqslant 1}$ vérifient $\varepsilon_i \perp\!\!\!\perp \varepsilon_j$ si $|i - j| > k$ avec k entier et i, j entiers non nuls