Feuille d'exercices n°65

Exercice 1 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_n$ une suite d'événements. On note

$$A = \text{« une infinité d'événements } A_n \text{ est réalisée »}$$

1. Montrer que A est un événement.
2. Si la série $\sum \mathbb{P}(A_k)$ converge, montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$.

   On suppose désormais les événements $(A_n)_n$ indépendants.

3. Montrer $\qquad \forall (n, N) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)\right)$
4. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 2 (***)

Soit $s > 1$ et $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{P})$ espace probabilisé tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s} \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ réel}$$

On pose $\qquad \forall p \in \mathbb{N}^* \qquad A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$

et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Montrer que les événements $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont indépendants.
3. Établir l'égalité $\qquad \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$

Exercice 3 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire indépendante des X_n à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $\qquad \forall \omega \in \Omega \qquad S_N(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$

1. Justifier que S_N est une variables aléatoire discrète.
2. Montrer l'égalité $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$.
3. On suppose X_1 et N d'espérance finie. Montrer que S_N est d'espérance finie et préciser $\mathbb{E}(S_N)$ en fonction de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X_1)$.
4. On suppose que $X_1 \sim \mathscr{B}(p)$ et $N \sim \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer la loi de S_N.
5. Retrouver le résultat précédent sans passer par les fonctions génératrices.

Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$. Pour $c > \lambda$, montrer qu'il existe $r \in \left]0\,;1\right[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant nc) \leqslant r^n$$

Exercice 5 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle positive d'espérance finie.

Montrer
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On pourra commencer par le cas $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Exercice 6 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ de même loi. On pose

$$\forall (\omega, n) \in \Omega \times \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{R}_n(\omega) = \mathrm{Card}\,\{\mathrm{X}_1(\omega), \ldots, \mathrm{X}_n(\omega)\}$$

1. Établir $\qquad \forall (n, a) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{E}(\mathrm{R}_n) = a + n\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant a)$
2. En déduire que si X_1 est d'espérance finie, alors $\mathbb{E}(\mathrm{R}_n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\sqrt{n})$.

Exercice 7 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p avec $p \in \left]0\,;1\right[$. Pour n entier non nul, on note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

1. Montrer $\qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n > \dfrac{n}{2p}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad$ et $\quad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \leqslant \dfrac{n}{2p}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   Dans ce qui suit, on note

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_n = \left\{\mathrm{S}_n > \frac{n}{2p}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_n = \left\{\mathrm{S}_n \leqslant \frac{n}{2p}\right\}$$

2. Montrer $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \dfrac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
3. Établir $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |\mathrm{Arctan}\; x - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$
4. Montrer qu'il existe un réel ℓ à préciser tel que

   $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|n\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n)\right) - \ell\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$