ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

# Feuille d'exercices n°66

## Exercice 1 (***)

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité $p \in ]\,0\,;1\,[$ et face avec probabilité $q = 1 - p$. On dit que la première série est de longueur $n \geqslant 1$ si les $n$ premiers lancers ont donné le même côté et le $n+1$ l'autre côté. La deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté. Pour $k \geqslant 1$, on note $\mathrm{P}_k$ l'événement pile au $k$-ième lancer $\mathrm{F}_k$ face au $k$-ième lancer et $\mathrm{L}_1$ et $\mathrm{L}_2$ les longueurs respectives des deux séries.

1. Déterminer la loi de $\mathrm{L}_1$.
2. Justifier que $\mathrm{L}_1$ est d'espérance finie puis la calculer.
3. Déterminer la loi de $\mathrm{L}_2$.
4. Justifier que $\mathrm{L}_2$ est d'espérance finie puis la calculer.
5. Les variables aléatoires $\mathrm{L}_1$ et $\mathrm{L}_2$ sont-elles indépendantes ?

**Indications :** 2. Utiliser la série entière $\sum nx^n$.
5. Résoudre l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{L}_1 = 1, \mathrm{L}_2 = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{L}_1 = 1)\mathbb{P}(\mathrm{L}_2 = 1)$.

## Exercice 2 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_n$ et $\mathrm{X}$ des variables aléatoires réelles discrètes telles que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pour $x$ point de continuité de $\mathrm{F}_\mathrm{X} : t \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant t)$, montrer que

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{F}_\mathrm{X}(x)$$

**Indications :** Pour $\varepsilon > 0$, utiliser le système complet $(\{|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| < \varepsilon\}, \{|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| \geqslant \varepsilon\})$. Établir l'encadrement

$$\mathrm{F}_\mathrm{X}(x - \varepsilon) + \mathrm{o}(1) \leqslant \mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) \leqslant \mathrm{F}_\mathrm{X}(x + \varepsilon) + \mathrm{o}(1)$$

puis conclure par continuité de $\mathrm{F}_\mathrm{X}$ en $x$.

## Exercice 3 (****)

Soient $(\mathrm{X}_n)_n$ et $\mathrm{X}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad p_{k,n} = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k) \quad \text{et} \quad p_k = \mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$$

1. Définir la fonction génératrice $\mathrm{G}_\mathrm{X}$ et justifier qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\,0\,;1\,[$.
2. On suppose que $p_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p_k$ pour tout $k$ entier. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n})_n$ converge simplement vers $\mathrm{G}_\mathrm{X}$ sur $[\,0\,;1\,[$.
3. Étudier la réciproque.

**Indications :** 1. Invoquer un résultat de séries entières.
2. Procéder par double limite.
3. Mettre en œuvre un procédé diagonal sur la suite de suites $\big((p_{k,n})_n\big)_k$ puis utiliser le résultat de la question précédente.

## Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et Y une variable aléatoire réelle discrète centrée telle que $\mathrm{Y}(\omega) \subset [\,a\,;b\,]$. Montrer

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \ln \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}}) \leqslant \frac{\lambda^2 (b-a)^2}{8}$$

**Indications :** Poser $\qquad \forall \mathrm{A} \in \mathscr{A} \qquad \mathbb{Q}(\mathrm{A}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathrm{A}} \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}}}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})}\right)$

et justifier qu'il s'agit d'une probabilité. Puis, établir par dérivation d'une série de fonctions

$$\mathbb{V}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Y}) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} \ln \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})$$

Enfin, conclure en majorant finement $\mathbb{V}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Y})$ avec l'inégalité de Popovicius.

## Exercice 5 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Par commodité, on confond vecteur et matrice colonne. Soit $\mathrm{U} = (\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$ un vecteur aléatoire discret. Le vecteur U est *d'espérance finie* si les $\mathrm{U}_i$ le sont et on pose $\mathbb{E}(\mathrm{U}) = (\mathbb{E}(\mathrm{U}_1), \ldots, \mathbb{E}(\mathrm{U}_n))$. Le vecteur U est dans $\mathrm{L}^2$ si les $\mathrm{U}_i\mathrm{U}_j$ sont d'espérance finie et on définit $\mathbb{V}(\mathrm{U})$ sa *matrice de covariance* par

$$\mathbb{V}(\mathrm{U}) = \mathbb{E}\left[(\mathrm{U} - \mathbb{E}(\mathrm{U}))(\mathrm{U} - \mathbb{E}(\mathrm{U}))^{\mathrm{T}}\right]$$

On considère le *modèle de régression* décrit par

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A}\theta + \varepsilon$$

avec $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} = p$, $\theta \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ un paramètre inconnu et $\varepsilon$ un vecteur aléatoire discret dans $\mathrm{L}^2$ avec $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ et $\mathbb{V}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathrm{I}_n$. La grandeur d'intérêt dans ce modèle est le paramètre $\theta$. On observe le vecteur Y et on cherche à estimer finement $\theta$ à partir de cette observation Y. On appelle *estimateur sans biais* de $\theta$ une vecteur aléatoire T(Y) avec $\mathrm{T} : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que T(Y) est d'espérance finie avec $\mathbb{E}(\mathrm{T}(\mathrm{Y})) = \theta$.

1. Déterminer le vecteur aléatoire $\widehat{\theta}$ qui minimise $\|\mathrm{Y} - \mathrm{AX}\|^2$ pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\widehat{\theta}$ est un estimateur sans biais de $\theta$.
3. Soit $\widetilde{\theta} = \mathrm{LY}$ avec $\mathrm{L} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice L pour que $\widetilde{\theta}$ soit un estimateur sans biais de $\theta$ et ce pour tout $\theta \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
4. On suppose que la matrice L vérifie la condition précédemment établie. Établir
$$\mathbb{V}(\widetilde{\theta}) - \mathbb{V}(\widehat{\theta}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$$
5. Conclure que $\qquad \mathbb{E}(\|\widetilde{\theta} - \theta\|^2) \geqslant \mathbb{E}(\|\widehat{\theta} - \theta\|^2)$

**Indications :** 1. Observer $\underset{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\mathrm{Inf}} \|\mathrm{Y} - \mathrm{AX}\|^2 = \mathrm{d}(\mathrm{Y}, \mathrm{Im}\ \mathrm{A})^2$. En déduire l'existence puis l'unicité de $\widehat{\theta}$ tel que $\|\mathrm{Y} - \mathrm{A}\widehat{\theta}\| = \mathrm{d}(\mathrm{Y}, \mathrm{Im}\ \mathrm{A})$. Déterminer enfin $(\mathrm{AX})^\top(\mathrm{Y} - \mathrm{A}\widehat{\theta}) = \left\langle \mathrm{X}, \mathrm{A}^\top\mathrm{Y} - \mathrm{A}^\top\mathrm{A}\widehat{\theta}\right\rangle$ pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ par caractérisation géométrique du projeté orthogonal et en déduire $\widehat{\theta}$.
2. Établir l'égalité $\widehat{\theta} = \theta + \mathrm{B}\varepsilon$ avec B une matrice à préciser.
3. Utiliser la linéarité de l'espérance.
4. Justifier que $\widetilde{\theta}$ admet un moment d'ordre deux puis développer $\mathbb{V}(\widetilde{\theta}) = \mathbb{V}(\widetilde{\theta} - \widehat{\theta} + \widehat{\theta})$.
5. Écrire $\|\widetilde{\theta} - \theta\|^2$ en fonction de $(\widetilde{\theta} - \theta)(\widetilde{\theta} - \theta)^{\mathrm{T}}$ puis conclure.