Corrigé du TP Informatique 17

Exercice 1

1. On saisit :

```
def rect(f,a,b,n):
    res=0
    h=(b-a)/n
    c=a
    for k in range(n):
        res+=f(c)
        c+=h
    return res*h
```

2. On saisit :

```
def trap(f,a,b,n):
    res=(f(a)+f(b))/2
    h=(b-a)/n
    c=a
    for k in range(1,n):
        c+=h
        res+=f(c)
    return res*h
```

2. On saisit :

```
f=np.sin
a=0;b=np.pi/2;res=1

tn=range(10,1001,10)
t_log=[np.log(n) for n in tn]

t_rect=[np.log(np.abs(rect(f,a,b,n)-res)) for n in tn]
t_trap=[np.log(np.abs(trap(f,a,b,n)-res)) for n in tn]

plt.plot(t_log,t_rect,t_log,t_trap)
plt.grid();plt.show()
```

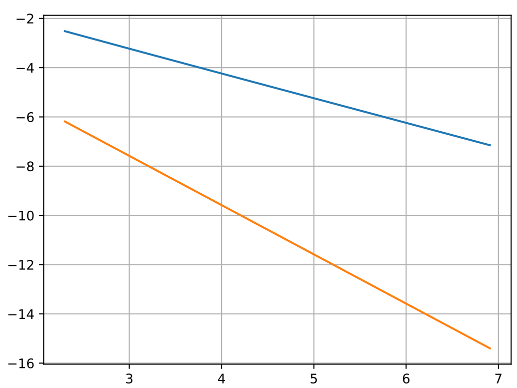

FIGURE 1 – Graphes de $(\log(n), \log(|\Delta_n - 1|))$

On observe des comportements linéaires qu'on peut interpréter ainsi

$$\log(|\mathrm{R}_n - 1|) \backsimeq -\log(n) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

$$\log(|\mathrm{T}_n - 1|) \backsimeq -2\log(n) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

En fait, on peut montrer les comportements asymptotiques suivants :
Si $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$, alors

$$\mathrm{R}_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et si $f \in \mathscr{C}^2([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$, alors

$$\mathrm{T}_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

qui justifient en partie les observations.

Exercice 2

1. On a la relation $\boxed{x(t+h) = x(t) + \int_t^{t+h} f(x(s), s)\,\mathrm{d}s}$

2. Pour le schéma d'Euler explicite, on approche l'intégrale $\int_t^{t+h} f(x(s), s)\mathrm{d}s$ par la méthode des rectangles à gauche et on en déduit l'approximation

$$x(t+h) \simeq x(t) + hf(x(t), t)$$

La solution approchée vérifie alors la relation de récurrence

$$\boxed{\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad x_k = x_{k-1} + h_{k-1} f(x_{k-1}, t_{k-1})}$$

3. On saisit :

```
def Euler(f,x0,t):
   x=[x0]
   for k in range(1,len(t)):
      h=t[k]-t[k-1]
      x.append(x[k-1]+h*f(x[-1],t[k-1]))
   return x
```

4. On saisit :

```
a=lambda t:-20;b=lambda t:10*np.sin(np.pi
f=lambda x,t:a(t)*x+b(t)

t=np.linspace(0,10,120);x0=1
xe=Euler(f,x0,t);
y=integr.odeint(f,x0,t)
plt.plot(t,xe,'b',t,y,'r',linewidth=2)
plt.grid();plt.show()
```

FIGURE 2 – Méthode d'Euler explicite

Exercice 3

1. On saisit :

```
def f(x,t):
    return -x/(1+t)+np.sin(t)

tt=np.linspace(-.9,8,100)
for x0 in np.linspace(-10,10,10):
    tx=integr.odeint(f,x0,tt)
    plt.plot(tt,tx)
plt.grid();plt.show()
```

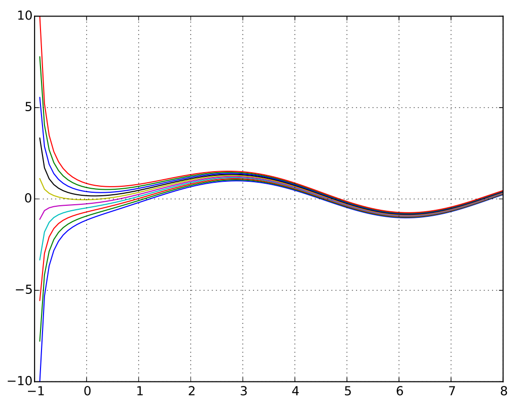

FIGURE 3 – Courbes intégrales, continuité du flot

2. On saisit :

```
def f(x,t):
    return 2*x/t-t*np.cos(1/t)

x0=0
for t0 in np.linspace(-1/np.pi,-.2,10):
    tt=np.linspace(t0,-.0001,100)
    tx=integr.odeint(f,x0,tt)
    plt.plot(tt,tx)
plt.grid();plt.show()
```

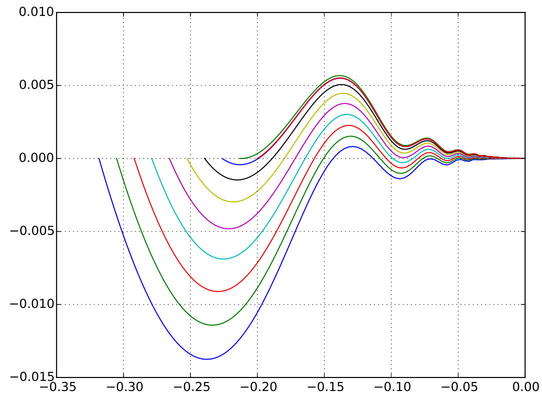

FIGURE 4 – Courbes intégrales, continuité du flot

Sur les deux figures, on observe un phénomène de *continuité du flot* qui signifie que les courbes intégrales varient continument en fonction des conditions initiales.

3. On saisit :

```
x0=0
t0=.001

for n in range(100,1100,100):
    tt=np.linspace(t0,.1,n)
    tx=integr.odeint(f,x0,tt)
    plt.plot(tt,tx)
plt.grid();plt.show()
```

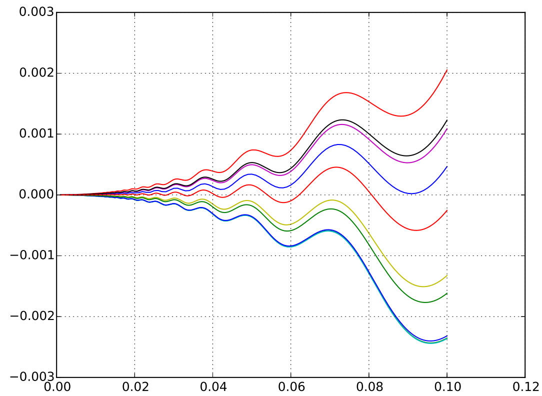

FIGURE 5 – Variation du pas de discrétisation

On observe des courbes différentes pour un même problème de Cauchy ce qui est impossible puisque le théorème de Cauchy linéaire garantit existence et unicité d'une solution. Il s'agit donc d'une défaillance de l'instruction `integr.odeint` qui s'explique par l'oscillation extrêmement rapide de la fonction $t \mapsto t\cos\left(\dfrac{1}{t}\right)$ au voisinage de zéro.

Exercice 4

1. On saisit :

```
def f(X,t):
    x,dx=X
    return [dx,-3*dx-2*x+np.exp(-t)]

tt=np.linspace(0,10,1000)
X0=[1,1]
tX=integr.odeint(f,X0,tt)
plt.plot(tt,tX[:,0])
plt.grid();plt.show()
```

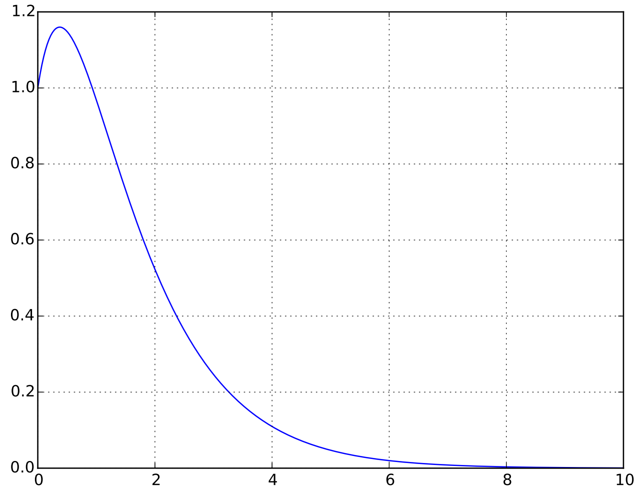

FIGURE 6 – Solution du problème (C_1)

2. On saisit :

```
def f(X,t):
    x,dx=X
    return [dx,-np.sin(x)]

tt=np.linspace(0,10,1000)
X0=[1,2]
tX=integr.odeint(f,X0,tt)
plt.plot(tt,tX[:,0])
plt.grid();plt.show()
```

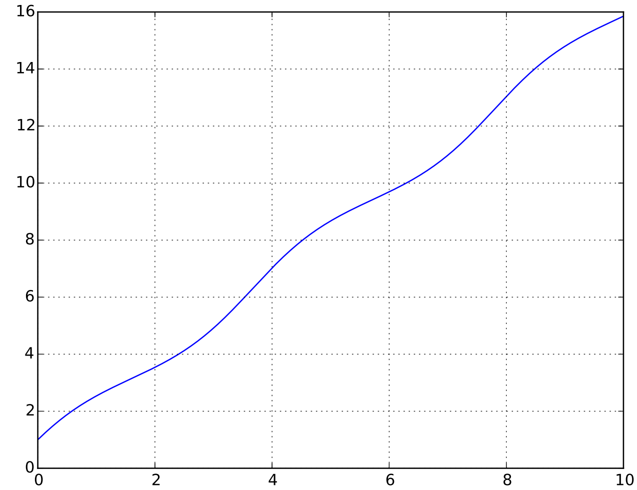

FIGURE 7 – Solution du problème (C_2)