ISM MP, Informatique
Année 2024/2025

TP Informatique 17

Exercice 1

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,]\,,\mathbb{R})$. Pour n entier non nul et $k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$, on note $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ puis R_n le calcul approché de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la méthode des rectangles et T_n le calcul approché par la méthode des trapèzes.

1. Écrire une fonction `rect(f,a,b,n)` calculant une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la méthode des rectangles.
2. Même question pour l'écriture d'une fonction `trap(f,a,b,n)` avec la méthode des trapèzes.

   On considère $f(t) = \sin(t)$ pour $t \in [\,a\,;b\,]$ avec $a = 0$ et $b = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Représenter la suite de points $(\log(n), \log(|\Delta_n - 1|))_{n\in\{10k, k\in[\![\,1\,;\,100\,]\!]\}}$ avec $\Delta_n = \mathrm{R}_n$ puis $\Delta_n = \mathrm{T}_n$ et commenter les graphiques obtenus.

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{avec} \quad a : t \mapsto -20,\ b : t \mapsto 10\sin(\pi t)$$

1. Écrire la relation entre $x(t+h)$ et $x(t)$.
2. Rappeler le principe de la méthode d'Euler explicite et préciser la relation de récurrence entre x_k et x_{k-1} pour $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$.
3. Écrire une fonction `Euler(f,x0,t)` qui calcule une solution au problème de Cauchy selon le schéma d'Euler explicite.
4. Représenter simultanément la solution approchée fournie par `Euler` et celle fournie par `integr.odeint` avec l'intervalle de temps discrétisé `np.linspace(0,10,120)`.

Exercice 3

1. Représenter simultanément une dizaine de courbes intégrales solutions de

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{x}{1+t} + \sin t \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

   avec $t_0 = -0.9$, x_0 variant dans $[\,-10\,;10\,]$ sur l'intervalle $[\,-0.9\,;8\,]$.

2. Représenter simultanément une dizaine de courbes intégrales solutions de

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2x}{t} - t\cos\left(\dfrac{1}{t}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $x_0 = 0$, t_0 variant dans $[\,-1/\pi\,;-0.2\,]$ sur l'intervalle $[\,t_0\,;-10^{-4}\,]$.

3. Reprendre le système précédent avec $(x_0, t_0) = (0, 0.001)$ et représenter simultanément différentes courbes intégrales sur l'intervalle de temps discrétisé `np.linspace(t0,.1,n)` avec `n` variant de 100 à 1000. Expliquer le comportement observé.

Exercice 4

1. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) = \mathrm{F}(x'(t), x(t), t) \\ (x(t_0), x'(t_0)) = (x_0, v_0) \end{cases}$$

En posant $\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par X de la forme $\mathrm{X}'(t) = f(\mathrm{X}(t), t)$.

2. Pour le problème de Cauchy

$$(\mathrm{C}_1) : \begin{cases} x'' + 3x' + 2x = \mathrm{e}^{-t} \\ (x(0), x'(0)) = 1, 1 \end{cases}$$

écrire la fonction `f(X,t)` associée à la formulation différentielle d'ordre 1 d'arguments `X` une liste de deux flottants, `t` un flottant puis tracer la solution du problème de Cauchy (C_1) sur l'intervalle de temps $[\,0\,;10\,]$ discrétisé avec 1000 valeurs régulièrement espacées.

3. Pour le problème de Cauchy

$$(\mathrm{C}_2) : \begin{cases} x'' + \sin(x) = 0 \\ (x(0), x'(0)) = 1, 2 \end{cases}$$

écrire la fonction `f(X,t)` associée à la formulation différentielle d'ordre 1 d'arguments `X` une liste de deux flottants, `t` un flottant puis tracer la solution du problème de Cauchy (C_2) sur l'intervalle de temps $[\,0\,;10\,]$ discrétisé avec 1000 valeurs régulièrement espacées.