

**DS6 de Physique du 25/01/25****Calculatrice autorisée****Durée 4h*****Rappel des consignes :****Présentation de la copie :*

- *Laisser une marge à gauche pour la notation.*
- *Encadrer ou souligner les résultats.*
- *Donner le numéro complet de la question à laquelle vous répondez.*

*Rédaction :*

- *Répondre précisément aux questions posées*
- *Respecter les notations de l'énoncé.*
- *Ne pas utiliser d'abréviations (sauf si elles ont été définies)*
- *Justifier tous les résultats.*
- *Rédiger de façon claire, précise et concise.*
- *Citer le nom des lois utilisées.*
- *Toujours donner un résultat littéral (avant de faire éventuellement l'application numérique), sans application numérique intermédiaire, sans mélanger littéral et numérique.*
- *Contrôler l'homogénéité du résultat.*

*Applications numériques :*

- *Donner un nombre raisonnable de chiffres significatifs.*
- *Arrondir correctement la valeur donnée par la calculatrice.*
- *Ne jamais oublier les unités.*
- *Contrôler que l'ordre de grandeur est raisonnable.*
- *Ne jamais réutiliser le résultat arrondi d'une application numérique précédente (pour éviter les erreurs d'arrondis)*

***La notation prendra en compte le respect de ces consignes (aucun point pour un résultat non homogène, des points de rédaction...)***

# Problème 1: Particule matérielle dans un puits de potentiel infini

On sera attentif au nombre de chiffres significatifs des applications numériques.

Données ou formules nécessaires :

- constante de Planck  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  J.s (on note  $\hbar$  la quantité  $h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34}$  J.s)
- constante de Boltzmann  $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23}$  J.K<sup>-1</sup>
- nombre d'Avogadro  $N_A = 6,0 \cdot 10^{23}$  mol<sup>-1</sup>
- vitesse de la lumière dans le vide  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m.s<sup>-1</sup>
- charge élémentaire  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C
- masse de l'électron  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg
- gammes de longueurs d'onde  $\lambda$  du spectre électromagnétique des différents rayonnements :

$\gamma$	X	UV	visible	IR	radio
$\lambda < 10$ pm	$10$ pm $< \lambda < 100$ nm	$100$ nm $< \lambda < 380$ nm		$780$ nm $< \lambda < 1$ mm	$1$ mm $< \lambda$

Equation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)$$

## I. Dualité onde-corpuscule

### Ondes électromagnétiques

- I.1.** Rappeler quels sont les liens entre la pulsation  $\omega$  et le vecteur d'onde  $\vec{k}$  d'une onde électromagnétique et les caractéristiques de la particule associée, le photon.
- I.2.** Quels sont les ordres de grandeur de l'énergie, exprimée en eV, d'un photon visible et d'un photon X qui est diffracté par les réseaux cristallins ?
- I.3.** Pour un photon qui se propage dans un milieu d'indice  $n$ , écrire la norme de sa quantité de mouvement en fonction de  $n$ ,  $h$  et sa longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ .

### Ondes de matière

- I.4.** Donner le vecteur d'onde et la pulsation de l'onde associée à une particule de masse  $m$  non relativiste d'énergie  $E$  et de quantité de mouvement  $\vec{p} = m \frac{dx}{dt} \vec{e}_x$ .
- I.5.**
- I.5.a.** Etablir l'expression de la longueur d'onde associée à un électron, initialement immobile, non relativiste, accéléré avec une différence de potentiel  $U$  (en fonction de  $U$ ,  $h$ ,  $e$ , et  $m_e$ ).
- I.5.b.** Déterminer la valeur de  $U$ , pour laquelle on obtiendrait la même longueur d'onde que celle d'un photon X de longueur d'onde  $\lambda = 0,1$  nm.
- I.6.** Un électron, qui assure la conduction métallique, doit-il être considéré comme quantique ? On considère que le réseau cristallin est caractérisé par un paramètre de maille  $a$  de l'ordre de  $10^{-10}$  m et que les électrons libres ont une vitesse  $v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}$  due à l'agitation thermique. On se placera à 300 K.
- I.7.** Pouvez-vous citer les noms de 3 physiciens qui se sont illustrés par leur contribution en physique quantique ? Placer leurs travaux par ordre chronologique.

## Diffusion Brillouin

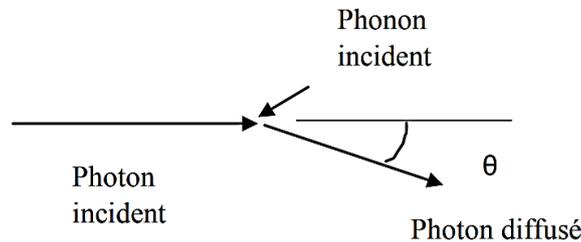
**I.8.** Une onde sonore monochromatique se décrit, comme toute onde, au moyen d'une pulsation  $\omega$  et d'un vecteur d'onde  $\vec{k}$ . On lui associe une particule appelée phonon.

**I.8.a.** Donner la quantité de mouvement  $\vec{q}$  du phonon associé à une onde acoustique de fréquence  $\nu$ , qui se propage dans l'eau avec une célérité  $\vec{V} = V\vec{u} = \frac{\omega}{k}\vec{u}$ ,  $\vec{u}$  étant le vecteur unitaire de la direction de propagation orienté dans le sens de la propagation.

**I.8.b.** Donner l'énergie  $e_p$  de ce phonon.

**I.9.** La diffusion Brillouin correspond à un choc entre une particule photon incident et une particule phonon avec annihilation du phonon et diffusion d'un photon émergent. On suppose que le système est un système isolé. La situation des vecteurs quantités de mouvement avant et après le choc est représentée par les vecteurs de la **figure 1**

Justifier pourquoi la quantité de mouvement se conserve dans un système isolé. Quelle autre grandeur est conservative ?



**Figure 1 - Vecteurs quantités de mouvement annihilation**

**I.10.** On considère un phonon associé à l'onde sonore, engendrée dans l'eau liquide, qui se propage avec une célérité  $V = 1525 \text{ m.s}^{-1}$ , à  $50^\circ\text{C}$ . L'indice optique de l'eau vaut 1,33. Une source de lumière laser, de longueur d'onde  $\lambda_{inc} = 0,53 \mu\text{m}$  et de fréquence  $\nu_{inc}$ , arrive sur une cuve remplie d'eau liquide juste saturante. La collision photon-phonon engendre un photon de longueur d'onde  $\lambda_{ém}$  (fréquence  $\nu_{ém}$ ).

On observe le faisceau lumineux transmis dans la direction qui fait un angle  $\theta$  avec la direction du faisceau incident. Dans ce choc, le phonon de quantité de mouvement initiale  $\vec{q}$  disparaît. On peut établir, à partir des lois de conservation précédemment citées et en tenant compte des ordres de grandeur, que la quantité de mouvement du phonon vaut :

$$q \cong 2 \frac{nh}{\lambda_{inc}} \sin \frac{\theta}{2} .$$

**I.10.a.** En déduire le décalage en fréquence du photon  $\Delta\nu^+ = \nu_{ém}^+ - \nu_{inc}$  en fonction de  $\lambda_{inc}$ ,  $n$ ,  $V$  et  $\theta$ .

**I.10.b.** Evaluer numériquement le décalage Brillouin dans la direction  $\theta = 90^\circ$ , pour l'eau saturante à  $50^\circ\text{C}$ , sous les deux formes suivantes :

- i) absolu en fréquence  $\Delta\nu^+$  ;
- ii) relatif en longueur d'onde  $\Delta\lambda^+/\lambda_{inc}$ .

**I.10.c.** La résolution d'un spectromètre à réseau vous semble-t-elle suffisante pour déceler ce décalage ?

## II. Particule engagée dans un puits de potentiel infini

Nous allons étudier dans cette partie, dans le cadre de la mécanique quantique, une particule, autre que le photon, dans une cavité.

Cette particule de masse  $m$  se déplace sur l'axe des  $x$  dans un potentiel  $U(x)$  tel que :

$$U(x) = 0 \text{ pour } -a < x < a \quad \text{et} \quad U(x) \rightarrow \infty \text{ pour } x > a \text{ et } x < -a \quad \text{avec } a > 0.$$

On note  $\varphi(x)$  la partie spatiale de la fonction d'onde stationnaire de la particule et  $E$  son énergie associée.

On pose  $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ .

### Niveaux d'énergie

**II.1.** Etablir, par séparation des variables, l'équation de Schrödinger indépendante du temps que doit vérifier la fonction  $\varphi(x)$ .

**II.2.** Justifier que pour les domaines  $x < -a$  et  $x > a$ , la seule solution possible est  $\varphi(x) = 0$ . Commenter.

**II.3.** A partir de la recherche des solutions de l'équation de Schrödinger, déterminer les valeurs des niveaux d'énergie  $E$  dans le domaine  $-a < x < a$  (*la démonstration est attendue*).

**II.4.** Normaliser puis exprimer les fonctions d'onde (fonctions d'onde totales, pas seulement la partie spatiale) pour les deux premiers niveaux d'énergie (*préciser les valeurs de ces énergies*).

**II.5.** Représenter la partie spatiale de la fonction d'onde pour les deux premiers niveaux d'énergie.

**II.6.** En appliquant l'inégalité d'Heisenberg, justifier que l'énergie ne peut pas être nulle.

**II.7.** Comparer (les valeurs possibles de l'énergie) à la situation classique d'une particule dans une cuvette de potentiel.

### Caractéristiques de l'état fondamental dans le puits infini

**II.8.** Que vaut la valeur moyenne  $\langle x \rangle$  de la position de la particule dans l'état fondamental ?

**II.9.** Le calcul de la valeur moyenne de la distance au centre du puits conduit à :  $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = a/\sqrt{3}$   
En déduire l'écart-type de position.

**II.10.** Quel est l'ordre de grandeur de (ou l'inégalité vérifiée par) l'écart-type en impulsion ?  
Montrer que c'est en accord avec l'énergie du niveau fondamental.

## **Problème 2 : Effets quantiques dans les rebonds de neutrons**

*Ce problème est beaucoup moins guidé que le précédent. La résolution de certaines questions est assez longue (mais proche du cours). Certaines questions sont plus difficiles.*

Les neutrons peuvent rebondir élastiquement (c'est-à-dire sans perdre d'énergie cinétique) sur une paroi de nickel parfaitement lisse lorsque leur vitesse perpendiculaire à la paroi ne dépasse pas quelques mètres par seconde. Le but de ce problème est de décrire une expérience réalisée en 2002 à l'institut Laue-Langevin (Grenoble), dans laquelle des neutrons tombant sous l'effet de la gravité rebondissent sur une plaque horizontale. Pour des rebonds de très faible hauteur, cette expérience a révélé pour la première fois des effets quantiques dans un phénomène gravitationnel.

La première partie du problème modélise l'interaction quantique d'un neutron avec une paroi. La deuxième partie étudie les rebonds des neutrons sous l'action conjointe de la gravité et de l'interaction avec la paroi. Les parties sont dans une large mesure indépendantes.

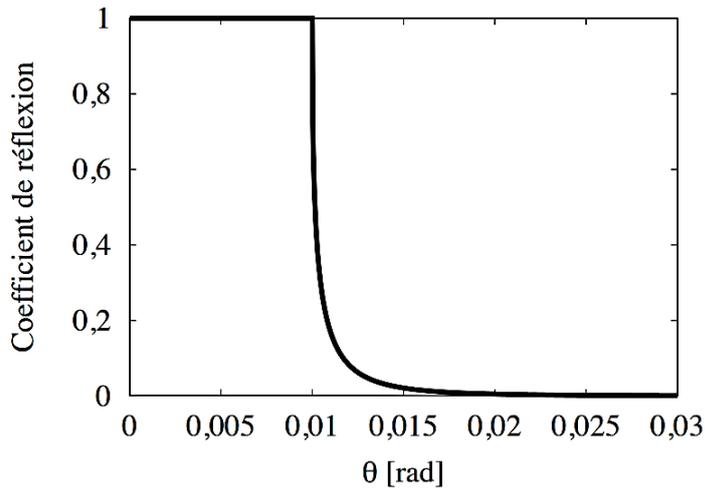
### **Notations et données numériques :**

Constante de Planck réduite	$\hbar$	=	$10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Accélération de la pesanteur	$g$	=	$10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse du neutron	$m$	=	$10^{-27} \text{ kg}$

### **I – Réflexion d'un neutron sur une paroi**

Une paroi de nickel plane se comporte, pour des neutrons de faible vitesse, comme une marche de potentiel de hauteur  $V_0$ , avec  $V_0 > 0$ . On choisit un système de coordonnées cartésiennes tel que la paroi est en  $x = 0$ . L'énergie potentielle  $V(x)$  est nulle pour  $x < 0$ , et vaut  $V_0$  pour  $x > 0$ . On néglige les effets de la gravité dans toute cette partie.

1. On suppose que le neutron se déplace suivant l'axe  $x$ . Modéliser une paroi comme une marche de potentiel uniforme ne se justifie que si la longueur d'onde de de Broglie du neutron est beaucoup plus grande que la distance entre deux atomes de la paroi, qui est elle-même de l'ordre de la taille d'un atome. Cette condition est-elle respectée si la vitesse du neutron est  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ?
2. On considère un état stationnaire d'énergie  $E$ . Écrire l'équation différentielle satisfaite par la partie spatiale de la fonction d'onde  $\varphi(x)$  pour  $x < 0$  et  $x > 0$ , et rappeler les conditions de continuité en  $x = 0$ .
3. On se place dans cette question le cas  $E > V_0$ . Déterminer **l'expression complète** de la fonction d'onde  $\psi(x,t)$  dans les deux régions de l'espace pour un neutron incident sur la marche de potentiel, arrivant de la direction  $x < 0$ , en fonction de l'amplitude  $A_1$  de l'onde incidente, de  $m$ ,  $E$ ,  $V_0$ ,  $\hbar$ ,  $x$  et  $t$ .
4. Même question dans le cas  $E < V_0$ .
5. Déterminer la vitesse  $v_c$  au-dessous de laquelle un neutron est totalement réfléchi par la marche de potentiel, qu'on exprimera en fonction de  $m$  et  $V_0$ .
6. On envoie un faisceau parallèle de neutrons monocinétiques de vitesse  $v_0 = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  sous incidence oblique sur une paroi de nickel. On admet que les composantes de la vitesse parallèles à la paroi sont conservées lors de l'interaction avec celle-ci, et que le calcul du coefficient de réflexion fait pour une incidence normale reste valide, sous incidence oblique, pour la composante de la vitesse normale à la paroi. La figure ci-après représente la fraction de neutrons réfléchis en fonction de l'angle  $\theta$  entre la paroi et la direction du faisceau. Déterminer, à partir de cette courbe, la valeur numérique de  $v_c$  pour le nickel.



7. Exprimer la fraction  $R$  de neutrons réfléchis en fonction d'abord de  $E$  et  $V_0$  ; puis en fonction de  $\theta$  et de l'angle  $\theta_c$  en-dessous duquel il y a réflexion totale.

8. Le phénomène de réflexion totale peut se décrire par une analogie optique, en assimilant le faisceau de neutrons de vitesse  $v_0$  à un rayon lumineux, et la paroi à un milieu transparent d'indice  $n < 1$ , l'indice de l'air étant par ailleurs supposé égal à 1. Exprimer l'indice  $n$  en fonction de  $v_0$  et  $v_c$ .

## II – Rebonds gravitationnels et effets quantiques

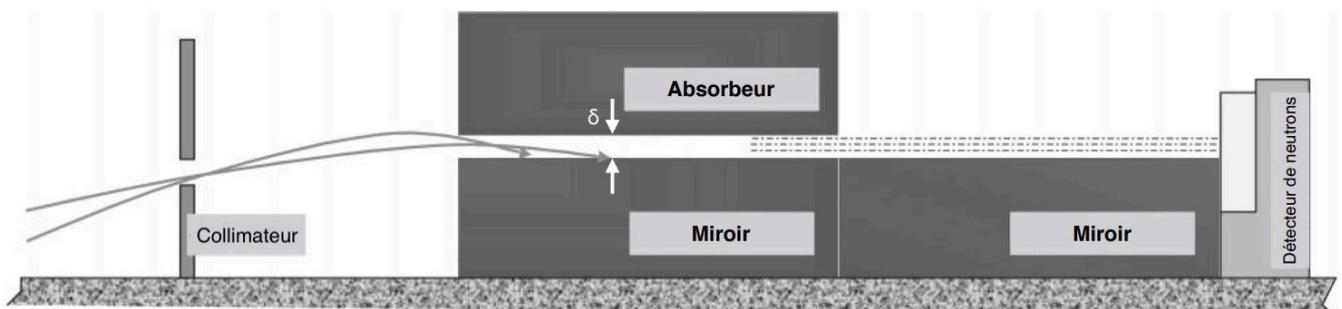
Un neutron rebondit élastiquement sur une plaque de nickel horizontale sous l'effet de la gravité. Nous décrivons son mouvement dans le cadre de la mécanique classique, puis en faisant appel à la mécanique quantique.

### Étude du mouvement classique

9. Établir la relation entre la hauteur  $H$  du rebond et la vitesse verticale  $v_0$  au moment où le neutron touche le miroir.

10. Calculer la durée  $T$  entre deux rebonds successifs, qu'on exprimera en fonction de  $g$  et  $H$ .

11. On place à une hauteur  $\delta$  au-dessus de la plaque de nickel, qu'on appelle "miroir", une deuxième plaque horizontale, parallèle à la première, faite dans un matériau différent qui absorbe les neutrons (voir schéma ci après). Un neutron est injecté entre les deux plaques à une hauteur  $z$  au-dessus du miroir, avec  $0 < z < \delta$ . On note  $v_z$  sa vitesse verticale au moment de l'injection. Montrer que si les plaques sont suffisamment longues, il est absorbé si  $|v_z|$  est supérieure à une valeur limite qu'on exprimera en fonction de  $\delta$ ,  $z$  et  $g$ .



12. On suppose pour simplifier que les neutrons incidents sont uniformément répartis suivant  $v_z$  et suivant  $z$ , sur toute la hauteur du couple absorbeur-miroir. Si on réalise des expériences avec différentes valeurs de  $\delta$ , montrer que le nombre de neutrons vus par le détecteur par unité de temps est proportionnel à  $\delta^\alpha$ , où  $\alpha$  est une constante qu'on déterminera.

### Échelles associées aux effets quantiques

13. À partir de  $\hbar$ ,  $m$  et  $g$ , construire par analyse dimensionnelle une longueur, un temps et une vitesse.

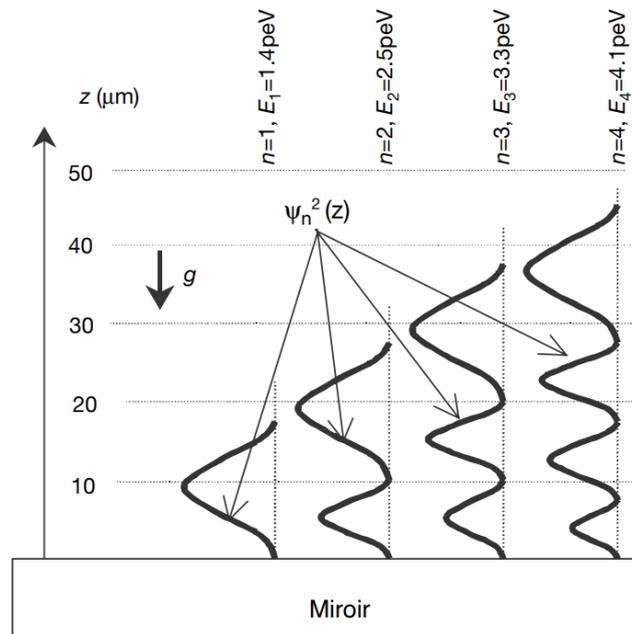
14. Estimer les ordres de grandeur de ces trois quantités.

### Étude quantique des rebonds

15. On suppose dans un premier temps le mouvement purement vertical. Écrire l'équation de Schrödinger à une dimension pour un état stationnaire d'énergie  $E$  du neutron dans le champ de pesanteur terrestre. On notera  $\varphi(z)$  la partie spatiale de la fonction d'onde.

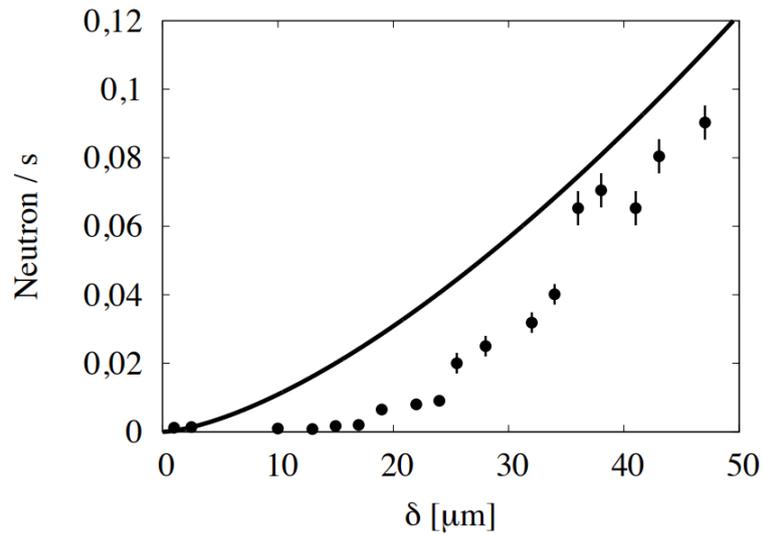
16. On modélise l'interaction avec le miroir par une barrière (ou une marche) de potentiel infinie. Expliquer pourquoi cette approximation est justifiée, si la vitesse verticale du neutron est de l'ordre de grandeur de la vitesse caractéristique définie à la question 14. Quelle est alors la condition sur  $\varphi(z)$  en  $z = 0$  ?

17. La figure ci-dessous représente, par ordre croissant d'énergie, les carrés des fonctions d'onde des quatre premiers états stationnaires, obtenus en résolvant l'équation de Schrödinger. L'extension des paquets d'onde est-elle de l'ordre de grandeur attendu ?



18. Rappeler, sans démonstration, la forme des fonctions d'onde des états stationnaires pour un puits de potentiel infini de taille  $L$ . Comparer au cas ci-dessus.

19. La figure ci-dessous représente le débit de neutrons reçus par le détecteur en fonction de la distance  $\delta$  séparant le miroir et l'absorbeur. La courbe pleine correspond au résultat du calcul classique de la question 13, et les points aux mesures expérimentales, avec les barres d'erreurs associées. On remarque que le nombre de neutrons est plus faible que ne prévoit le calcul classique, et que sa variation avec  $\delta$  n'est pas régulière mais présente des sauts. Grâce à la figure précédente, comment interprétez-vous ces résultats ?



[Données extraites de V. V. Nesvizhevsky et al., Nature 415, pp. 297-299 (2002).]

**20.** Pour que le mouvement vertical puisse être considéré comme stationnaire, il faut que le neutron ait le temps de rebondir plusieurs fois avant de ressortir. Cette condition est-elle vérifiée si le miroir et l'absorbeur ont une longueur  $L = 10$  cm, et si la vitesse horizontale du neutron est de l'ordre de la vitesse  $v_c$  déterminée à la question 6 ? (Calculer le nombre de rebonds pour  $\delta = 20 \mu\text{m}$  et  $v_c = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).